

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

LEILA ROLING SCARIOT DA SILVA

**Sobre Alianças Defensivas e Ofensivas  
Globais em Alguns Produtos de Grafos  
e Grafos Simpliciais**

Goiânia  
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

**AUTORIZAÇÃO PARA PUBLICAÇÃO DE TESE EM  
FORMATO ELETRÔNICO**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, **AUTORIZO** o Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás – UFG a reproduzir, inclusive em outro formato ou mídia e através de armazenamento permanente ou temporário, bem como a publicar na rede mundial de computadores (*Internet*) e na biblioteca virtual da UFG, entendendo-se os termos “reproduzir” e “publicar” conforme definições dos incisos VI e I, respectivamente, do artigo 5º da Lei nº 9610/98 de 10/02/1998, a obra abaixo especificada, sem que me seja devido pagamento a título de direitos autorais, desde que a reprodução e/ou publicação tenham a finalidade exclusiva de uso por quem a consulta, e a título de divulgação da produção acadêmica gerada pela Universidade, a partir desta data.

**Título:** Sobre Alianças Defensivas e Ofensivas Globais em Alguns Produtos de Grafos e Grafos Simpliciais

**Autor(a):** Leila Roling Scariot da Silva

Goiânia, 30 de Outubro de 2015.

---

Leila Roling Scariot da Silva – Autor

---

Dr. Rommel Melgaço Barbosa – Orientador

---

Dr. Mitre Costa Dourado – Co-Orientador

LEILA ROLING SCARIOT DA SILVA

# **Sobre Alianças Defensivas e Ofensivas Globais em Alguns Produtos de Grafos e Grafos Simpliciais**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação.

**Área de concentração:** Ciência da Computação.

**Orientador:** Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa

**Co-Orientador:** Prof. Dr. Mitre Costa Dourado

Goiânia  
2015

LEILA ROLING SCARIOT DA SILVA

# Sobre Alianças Defensivas e Ofensivas Globais em Alguns Produtos de Grafos e Grafos Simpliciais

Tese defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciência da Computação, aprovada em 30 de Outubro de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

---

**Prof. Dr. Rommel Melgaço Barbosa**

Instituto de Informática – UFG

Presidente da Banca

---

**Prof. Dr. Mitre Costa Dourado**

DCC-IM – UFRJ

---

**Prof. Dr. Fernando Marques Federson**

Instituto de Informática-UFG

---

**Prof. Dr. Thierson Couto Rosa**

Instituto de Informática-UFG

---

**Prof. Dr. José Plínio de Oliveira Santos**

IME-Unicamp

---

**Prof. Dr. Robson da Silva**

ICT-Unifesp

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

### **Leila Roling Scariot da Silva**

Leila Roling Scariot da Silva possui graduação em Ciência da Computação pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (1999) e mestrado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Campinas (2003). Atualmente é professora efetiva do Instituto Federal de Educação Tecnológica - Câmpus Morrinhos.

Ao amores de minha vida: Gilberto, Ana e Fernando.

---

## Agradecimentos

---

A presença de Deus em minha vida é tão fortemente sentida, que preciso agradecê-lo todos os dias pelas bênçãos que tenho recebido.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Rommel Melgaço Barbosa que confiou em mim, sempre me apoiou e me norteou com muita sabedoria.

Agradeço aos meus pais, que não somente me deram a vida, me ensinar o amor incondicional, como se fosse pouco, mas que participaram ativamente neste trabalho, me apoiando e me insentivando imensamente nos meus estudos.

Aos meus amigos Márcio, Érika e Elisangela, meu muito obrigada pelo insentivo e apoio. E meu especial agradecimento a minha amiga Márcia que muito contribuiu com minha pesquisa, e que recebeu-me tantas vezes em sua casa com tanto carinho e hospitalidade.

A minha família, meu marido Gilberto, meus filhos Ana e Fernando, só consigo dizer 'Muito Obrigada!' Amo vocês.

Agradeço ao meu coorientador, Prof. Mitre Dourado, excelente coorientador, fez as praias do Rio ficarem simples diante dos teoremas explorados por nós.

Por fim, agradeço a UFG - Universidade Federal de Goiás e aos técnicos administrativos do Instituto de Informática sempre muito prestativos. Ao IF Goiano - Campus Morrinhos pelo apoio a minha capacitação. Também a FAPEG - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás pelo financiamento parcial da pesquisa.

De todas as coisas existentes algumas estão sob o nosso poder e outras não. Debaixo do nosso poder estão o pensamento, o impulso, a vontade de adquirir e a vontade de evitar e, numa palavra, tudo que resulta das nossas ações. As coisas que não estão sob nosso poder incluem o corpo, a propriedade, a reputação, o cargo e, numa palavra, tudo aquilo que não resulta das nossas ações. As coisas sob nosso poder são, por natureza, livres, não encontram obstáculos à sua frente, não são por nada limitadas: as coisas que não estão debaixo do nosso poder são fracas, servis, sujeitas a limitações, dependentes de outros fatores. Lembre-se, que se você imagina que aquilo que é naturalmente escravo está livre e aquilo que naturalmente pertence a uma outra pessoa é propriedade sua, então você estará prejudicado, você irá lamentar e ser colocado em (um estado de) confusão, você irá culpar deuses e homens; mas se você pensa que somente aquilo que lhe próprio é que lhe pertence e aquilo que é próprio de outrem realmente pertence aquele outrem, ninguém jamais irá colocar imposições ou limitações sobre você, você não irá culpar a ninguém, não fará nada contra a sua própria vontade, não terá nenhum inimigo, pois nenhum mal pode alcançá-lo.

**Epicteto,**  
*A arte de viver.*



---

## Resumo

---

da Silva, Leila R. S.. **Sobre Alianças Defensivas e Ofensivas Globais em Alguns Produtos de Grafos e Grafos Simpliciais**. Goiânia, 2015. 67p. Tese de Doutorado Relatório de Graduação. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

A aliança é um conceito introduzido por Hedetniemi, Hedetniemi e Kristiansen em 2004, onde foram classificadas em defensiva, ofensiva ou poderosa. Informalmente, podemos entender uma aliança como uma coleção de entidades tal que a união é mais forte do que o indivíduo. Uma aliança, de qualquer entidade, pode tanto servir para proteção contra ataques, quanto para aumentar a capacidade para atacar outras entidades. Toda aliança é global se for um conjunto dominante. A complexidade computacional e aplicações para a defesa nacional, redes de computadores, distribuição computacional e redes sociais são exemplos que motivam os estudos sobre alianças em grafos. Neste trabalho nós lidamos com alguns limites e fórmulas fechadas de algumas famílias de produto lexicográfico para obter o número mínimo da aliança defensiva global e aliança ofensiva global e apresentamos uma relação entre grafos gerais e sua aliança defensiva global para prisma complementar, bem como obtivemos limites para algumas famílias de grafos como grafos simpliciais.

### Palavras-chave

aliança, produto em grafos, grafos simpliciais, dominação.

---

## Abstract

---

da Silva, Leila R. S.. **Defensive and offensive alliance at product graphs and simplicial graphs**. Goiânia, 2015. 67p. PhD. Thesis Relatório de Graduação. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

Given a graph  $G$ , a *defensive alliance* of a set of vertices  $A \subseteq V(G)$  satisfying the condition that for each  $v \in A$ ,  $|N[v] \cap A| \leq |N[v] - A|$ . The set  $S$  is an *offensive alliance* if the inequality holds for every  $v \in N[S] - S$ . A alliance  $A$  is called *global* if is also a dominant set. In this paper, we establish lower bounds for Simplicial Graphs and further give closed formulas and upper bounds to decide the *global, defensive, offensive, alliance numbers* for lexicographic product of paths, cycles, stars and complete graphs. We establish a relationship to global defensive alliance numbers and complementary prism product to graphs.

### Keywords

alliance, product graphs, simplicial graphs, domination.

---

# Sumário

---

Lista de Figuras	<b>10</b>
Lista de Tabelas	<b>12</b>
Notação	<b>13</b>
1 Introdução	<b>14</b>
2 Definições Básicas e Notação	<b>17</b>
3 Alianças Defensivas e Ofensivas Globais em Alguns Grafos	<b>22</b>
3.1 Alianças em Algumas Classes de Grafos	22
3.2 Alianças e Produto Cartesiano de Grafos	23
4 Resultados	<b>26</b>
4.1 Aliança Defensiva Global em Grafos Simpliciais e Prisma Complementar	26
4.2 Aliança Defensiva Global e Produto Lexicográfico de Caminhos e Ciclos e Grafos Estrela	28
4.3 Aliança Ofensiva Global e Produto Lexicográfico de Caminhos, Ciclos e Grafos Estrela	45
4.4 Mais algumas considerações	59
5 Conclusões e Trabalhos Futuros	<b>61</b>
Referências Bibliográficas	<b>63</b>

---

## Lista de Figuras

---

2.1	Conjunto dominante, Aliança defensiva Global e Aliança Ofensiva Global	18
2.2	Dois grafos simpliciais com vértices simpliciais em cinza	18
2.3	A Figura (c) é um exemplo de grafo resultante do produto cartesiano entre $P_3 \times P_2$	19
2.4	As Figuras (c) e (d) são exemplos de grafos resultantes do produto lexicográfico entre $P_2 \circ P_3$ e $P_3 \circ P_2$ respectivamente	20
2.5	Exemplos de representações de produto lexicográfico. Grafo $P_3$ em (a), o grafo $C_6$ na figura (b), $P_3 \circ C_6$ em (c) e a nossa representação do produto lexicográfico em (d).	20
2.6	Exemplo de grafo prisma complementar onde (a) é o grafo $G$ , (b) $\overline{G}$ e (c) o grafo $G\overline{G}$	21
4.1	Grafos que atendem ao limite fornecido na Proposição 4.2 com os vértices do conjunto- $\gamma_a$ em preto.	27
4.2	Exemplo de conjunto- $\gamma_a$ para $C_4 \circ C_m$ que atende a Proposição 4.11.	33
4.3	Exemplo de conjunto- $\gamma_a$ para $C_6 \circ C_m$ que atende a Proposição 4.12.	34
4.4	Exemplo de conjunto- $\gamma_a$ para $C_7 \circ C_m$ que atende a Proposição 4.13	35
4.5	Exemplo de conjunto- $\gamma_a$ para o $C_4 \circ P_m$ que atende a Proposição 4.19.	40
4.6	Exemplo de conjunto- $\gamma_a$ para o $C_5 \circ P_m$ que atende a Proposição 4.19.	40
4.7	Exemplo de conjunto- $\gamma_a$ para $C_6 \circ P_m$ que atende a Proposição 4.20.	41
4.8	Exemplo de conjunto- $\gamma_a$ para $C_7 \circ P_m$ que atende a Proposição 4.21.	42
4.9	Exemplos de produto lexicográfico que atendem a Proposição 4.25, sendo grafos resultantes de $C_n \circ K_7$ .	45
4.10	Exemplo de produto lexicográfico que atende a Proposição 4.27, sendo resultante de $P_3 \circ C_m$	47
4.11	Exemplo de produto lexicográfico que atende a Proposição 4.28, sendo resultante de $P_4 \circ C_{12}$	48
4.12	Exemplo de produto lexicográfico que atende a Proposição 4.29, sendo resultante de $P_5 \circ C_m$	48
4.13	Exemplos de produtos lexicográfico que atendem a Proposição 4.30 resultante de $P_n \circ C_3$ , sendo (a) $n$ par e (b) $n$ ímpar	49
4.14	Exemplos de produto lexicográfico que atendem as proposições 4.31 resultantes de $P_n \circ C_m$ , sendo (a) $P_6 \circ C_4$ , (b) $P_7 \circ C_5$ , (c) $P_8 \circ C_5$ , (d) $P_8 \circ C_6$	50
4.15	Exemplos de produto lexicográfico que atendem as proposições 4.32 resultantes de $P_7 \circ C_m$ , sendo (a) $m \leq 9$ e (b) $m \geq 9$	52
4.16	Exemplos de produto lexicográfico que atendem as conjecturas 4.33, sendo (a) $P_6 \circ C_m$ , (b) $P_8 \circ C_m$ , (c) $P_{10} \circ C_m$	53

- 4.17 Exemplos de produto lexicográfico que atendem as conjecturas 2 resultantes de  $P_n \circ C_m$  com  $n$  par, sendo (a)  $P_{12} \circ C_m$  para  $m \geq 8$ , (c)  $P_{14} \circ C_m$  para  $m \geq 8$  e (d)  $P_{16} \circ C_m$  para  $m \geq 8$  54
- 4.18 Exemplos de produto lexicográfico que atendem as conjecturas 2 resultantes de  $P_n \circ C_m$  com  $n$  ímpar, sendo (a)  $P_9 \circ C_7$ , (b)  $P_9 \circ C_m$  para  $m \geq 8$ , (c)  $P_{11} \circ C_m$  para  $m \geq 8$ , (d)  $P_{13} \circ C_m$  para  $8 \leq m \leq 12$ , (e)  $P_{13} \circ C_m$  para  $m \geq 12$ , (f)  $P_{17} \circ C_m$  para  $8 \leq m \leq 12$  e (g)  $P_{17} \circ C_m$  para  $m \geq 12$  54
- 4.19 Exemplos de produto lexicográfico que atendem o Teorema 4.40, sendo resultantes de  $P_n \circ S_m$  58
- 4.20 Exemplos de produto lexicográfico que atendem o Teorema 4.41, sendo resultantes de  $C_n \circ S_m$  59

---

## Lista de Tabelas

---

3.1	Número da AOG em produtos Cartesianos [53]	25
4.1	Resultados das Proposições 4.9 a 4.13 e 4.18 a 4.21.	31
4.2	Resumo das Proposições 4.17 a 4.21.	38

---

## Notação

---

Símbolo	Significado
$ A $	cardinalidade do conjunto $A$
$\overline{A}$	complemento do conjunto $A$
$d(v)$	grau do vértice $v$
$C_n$	ciclo com $n$ vértices
$E(G)$	conjunto de arestas do grafo $G$
$V(G)$	conjunto de vértices do grafo $G$
$\langle U \rangle$	grafo induzido de $G$ sob conjunto de vértices $U$
$G \times H$	produto Cartesiano dos grafos $G$ e $H$
$G \circ H$	produto lexicográfico dos grafos $G$ e $H$
$(G)_v$	subgrafo $\{v\} \circ H$ de $G \circ H$
$K_n$	grafo completo com $n$ vértices
$K_{m,n}$	grafo bipartido completo com partições de $m$ e $n$ vértices
$N(v)$	conjunto dos vértices adjacentes ao vértice $v$
$N[v]$	$N(v) \cup \{v\}$
$N_A(v)$	$N(v) \cap A$ .
$N[A]$	$\bigcup_{a \in A} N[a]$
$N(A)$	$N[A] \setminus A$
$\partial A$	$N[A] - A$
$P_n$	caminho com $n$ arestas
$\delta(G)$	grau mínimo do grafo $G$
$\Delta(G)$	grau máximo do grafo $G$
$a \equiv \text{ mod } m$	relação de congruência
$S_n$	estrela com $n$ vértices
$a(G)$	número da aliança defensiva
$\gamma(G)$	número do conjunto dominante de $G$
$\gamma_t(G)$	número do conjunto dominante total de $G$
$\gamma_a(G)$	número da aliança defensiva global
$a_k(G)$	número da $k$ -aliança defensiva
$a_o(G)$	número da aliança ofensiva
$\gamma_o(G)$	número da aliança ofensiva global

---

## Introdução

---

O conceito de aliança em grafos foi introduzido por Hedetniemi, Hedetniemi e Kristiansen em 2004 [32], onde alianças foram classificadas em defensiva, ofensiva ou poderosa.

Informalmente, podemos entender uma aliança como uma coleção de entidades tal que a união é mais forte do que o indivíduo. Uma aliança, de qualquer entidade, pode tanto servir para proteção contra ataques, quanto para aumentar a capacidade para atacar outras entidades.

Foram definidos diferentes tipos de alianças. As mais estudadas são as alianças defensivas [26, 32], alianças ofensivas [19, 35, 46], alianças poderosas ou dual [11, 12, 52]. Um conceito mais generalizado de aliança são as  $k$ -alianças [41, 42, 43], e mais recentemente, Dourado *et al.* em 2011 apresentaram uma nova definição de aliança que incorpora e expande os conceitos anteriores que são as  $(f, g)$ -alianças [16].

Uma aliança defensiva é um conjunto de vértices que, contendo pelo menos tantos vizinhos na aliança, incluindo ele próprio, quanto ao número de vizinhos não pertencentes a aliança. A aliança defensiva é forte se cada vértice tem mais vizinhos na aliança do que fora. Uma aliança ofensiva é um conjunto de vértices que cada vértice em sua fronteira tenha pelo menos tantos vizinhos na aliança que os vizinhos que estão de fora da aliança, incluindo ele próprio.

Mesmo sendo um conceito relativamente recente, tem motivado diversos pesquisadores devido a interessantes potenciais de aplicações como por exemplo na defesa nacional [13]. Nas redes de computadores, a aliança defensiva pode ser utilizada para modelar o contexto de coalisão, monopólio, e distribuição computacional pelos membros da aliança entre seus vizinhos que não estão na aliança [23, 33]. Nas redes tolerantes a falha, os processadores são particionados em duas alianças para obter a maioria quando há um conflito de distribuição de dados [48].

São muitos os estudos para aliança nas mais variadas classes de grafos como: árvores [7, 18, 25], grafos cúbicos [37], grafos linha [45], grafos planares [17, 38], grafos estrelas [31] invariantes em grafos, aliança defensiva em grafos regulares e grafos circulares [1], limites de número de independência sobre aliança global [15, 45, 46],



limites de aliança ofensiva [19]. As  $k$ -alianças defensivas foram estudadas em [40, 39, 47, 51]. O problema de decisão para determinar a  $k$ -aliança defensiva foi provado que é um problema NP-completo em [39], as  $k$ -alianças ofensivas foram estudadas em [6, 22, 47]. O artigo *On the complexity of finding optimal global alliances* [13], mostrou também que encontrar a aliança defensiva (ofensiva, e poderosa) ótima é um problema NP-difícil. Os estudos em [22] mostram que o problema de encontrar o número da  $k$ -aliança ofensiva ótima (global) é NP-Completo. O artigo [54], publicado em 2013 por Yero e Rodríguez-Velázquez, apresenta os principais resultados obtidos em alianças defensivas até aquele presente ano. Em 2014 Fernau e Rodríguez-Velázquez [21] publicaram um *survey* de aliança e a relação entre alguns parâmetros em grafos, onde também foi sugerido uma unificação dos trabalhos entre os conceitos de aliança e dominação.

Haynes, Hedetniemi e Henning [26] definiram uma aliança como global se ela também é um conjunto dominante. Ainda, determinaram a cardinalidade de um conjunto mínimo de uma aliança defensiva global (ADG) para algumas classes de grafos, bem como mostraram alguns limites de ADG mínima em grafos cúbicos e grafos bipartidos e árvores. Barbosa e Dias apresentam em [4] uma tabela com um panorama dos resultados já obtidos para alianças defensivas e defensivas globais. Com essa tabela é possível observar também que existem muitas classes de grafos que permanecem sem solução com relação as ADG. Em 2006, Rodríguez-Velázquez e Sigarreta [35] apresentaram alguns limites inferiores de aliança ofensiva global (AOG) mínima para alguns grafos. Favaron [20] realizou uma comparação entre alianças globais e dominação independente em grafos gerais, bipartidos e árvores. Um limite superior para número mínimo de ADG para grafos estrela foi apresentado em [31]. Chellali e Haynes [15] e Bouzeffrane e Chellali [7] apresentaram alguns limites superiores e inferiores para o número de dominação, o número mínimo ADG e AOG de uma árvore. Alguns destes estudos serão mais detalhados nos próximos capítulos.

Atualmente muitos estudos estão sendo realizados sobre vários parâmetros de grafos em produtos de grafos, principalmente para produto Cartesiano e lexicográfico [24]. Os estudos iniciais para aliança defensiva em produto cartesiano foram realizados por Brigham, Dutton e Hedetniemi em [11], também foram apresentados alguns parâmetros em [6, 47, 50] para produto Cartesiano em grafos para  $k$ -alianças. Seguindo esta linha, temos os estudos recentes de Chang *et al.* em 2012 [14] que apresentaram alguns limites superiores para produto cartesiano entre grafos caminho e ciclo. Yero e Rodríguez-Velázquez em 2013 [53] obtiveram formulas fechadas para o número de AOG para várias classes de produto Cartesiano de grafos. Para alianças em produto lexicográfico não foram encontradas publicações até o presente momento.

Um outro produto de grafo é o *prisma complementar*. O prisma complementar de  $G$  denotado por  $G\bar{G}$  é o grafo formado a partir da união disjunta de  $G$  e  $\bar{G}$ , adicionando as

---

arestas para um emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes de  $G$  e  $\overline{G}$ . Os estudos atuais para prismas complementares estão ocorrendo principalmente com relação aos parâmetros de dominação, distâncias e independência [27, 28, 29, 30].

Alguns problemas de grafos foram caracterizados para a classe de grafos simpliciais, tais como grafos  $Z_m$ -bem-cobertos [5], dominação eficiente [3] e outros resultados envolvendo grafos simpliciais foram obtidos por Randerath e Volkmann [34].

Para esses problemas apresentados acima, mostramos, nesta tese, algumas fórmulas fechadas para obter as ADG e AOG mínimas para produto lexicográfico em grafos caminho, ciclo, grafos completo e estrela, bem como mostraremos um limite superior para prismas complementares em grafos gerais. Também obtivemos um limite superior para grafos simpliciais.

A organização do trabalho se encontra do seguinte modo: No Capítulo 2 apresentamos as definições básicas e a notação adotada neste trabalho. A seguir, temos o Capítulo 3, que apresenta os estudos mais recentes das propriedades da ADG e AOG mínimas e produto cartesiano em algumas famílias de grafos. O Capítulo 4 mostra os resultados obtidos com algumas fórmulas fechadas, limites superiores e conjecturas sobre o comportamento para a cardinalidade da aliança defensiva e ofensiva global para produtos lexicográficos, bem como limites superiores para aliança defensiva global para prismas complementares em grafos simples e grafos simpliciais. Por fim, no Capítulo 5, discorremos sobre os problemas em aberto de acordo com os temas apresentados que servirão para foco de estudos futuros e considerações finais.

## Definições Básicas e Notação

Seja  $G = (V, E)$  um grafo com conjunto de vértices  $V$  de ordem  $n = |V|$  e conjunto de arestas  $E$  de tamanho  $m = |E|$  e seja  $v$  um vértice em  $V$ . A *vizinhança aberta* de  $v$  é o conjunto de vértices adjacentes a  $v$ , ou seja,  $N(v) = \{u \in V(G) : vu \in E(G)\}$ . A *vizinhança fechada* de  $v$  é  $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ . Se  $A \subseteq V$ , então  $N(A) = \cup_{v \in A} N(v)$ ,  $N[A] = N(A) \cup A$  e o subgrafo induzido por  $A$  será denotado por  $G[A]$  enquanto o grafo  $G - A$  é um grafo obtido de  $G$  por excluir os vértices em  $A$  e todas as suas arestas incidentes com  $A$ . Similarmente, para um conjunto  $A$ , a *fronteira* de  $A$  é o conjunto  $\partial A = N[A] - A$ .

Um *conjunto dominante* de  $G$ , denotado  $DS$ , é um conjunto  $A \subset V$  tal que todo vértice em  $V - A$  é adjacente a pelo menos um vértice em  $A$ . Em outras palavras, o conjunto  $A$  é dito ser dominante se  $N[A] = V(G)$ . O *número de dominação* de  $G$ , denotado por  $\gamma(G)$ , é a cardinalidade mínima dos  $DS$ . Um  $DS$  será um *conjunto dominante total*, denotado por  $\gamma_t(G)$ , se  $N(A) = V(G)$  ou, equivalentemente se  $v \in V$ , existe um  $u \in A$ ,  $u \neq v$ , tal que  $u$  é adjacente a  $v$ .

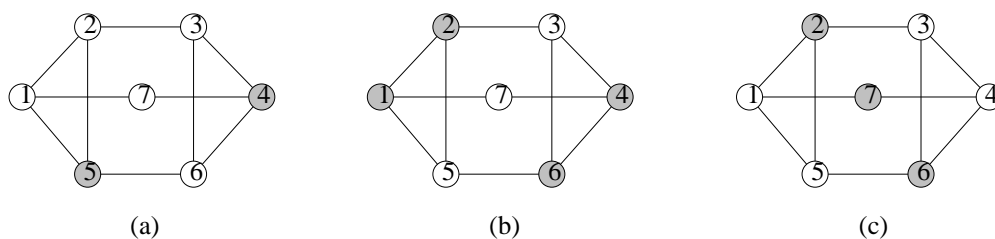
Designa-se como *grau de um vértice*  $v$ , denotado por  $d(v)$ , o número de arestas incidentes a  $v$ , isto é,  $d(v) = |N(v)|$ . O *grau máximo* dentre todos os vértices de um grafo  $G$  é denotado por  $\Delta(G)$  e o *grau mínimo* por  $\delta(G)$ . Um vértice que possui grau zero é denominado *isolado*, um vértice que possui grau um é denominado *vértice folha*.

Um conjunto não vazio de vértices  $A \subseteq V$  é chamado de *aliança ofensiva* se:  $\forall v \in \partial A, |N[v] \cap A| \geq |N[v] - A|$ .

Um conjunto não vazio de vértices  $A \subseteq V$  é chamado de *aliança defensiva* se:  $\forall v \in A, |N[v] \cap A| \geq |N(v) \cap (V - A)|$ .

Uma *aliança* (de qualquer tipo) é *global* se for também um conjunto dominante. O *número da aliança defensiva global*  $\gamma_a(G)$  (respectivamente, o número da *aliança ofensiva global*  $\gamma_o(G)$ ) é a cardinalidade mínima de uma aliança defensiva global (respectivamente, a cardinalidade mínima de uma aliança ofensiva global). Abreviamos aliança defensiva global como ADG e aliança ofensiva global como AOG.

Na Figura 2.1 temos três conjuntos dominantes distintos no grafo  $G$ , com vértices destacados em cinza. Em (a) temos somente um conjunto dominante. Em (b) temos uma ADG e em (c) uma AOG que não é defensiva.



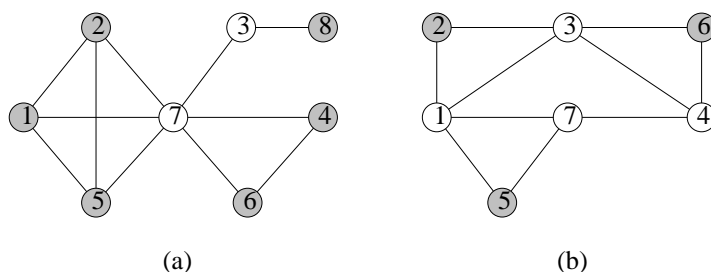
**Figura 2.1:** Conjunto dominante, Aliança defensiva Global e Aliança Ofensiva Global

O conceito de *aliança poderosa* é uma combinação de ambas as alianças. O conjunto  $A$  é tanto uma aliança defensiva como ofensiva, é o caso da aliança do grafo  $b$  da Figura 2.1. Uma aliança defensiva é chamada de *forte* se a maioria dos vértices estão na aliança,  $v \in A$ ,  $|N[v] \cap A| > |N(v) \cap (V - A)|$ .

Uma generalização destas alianças (defensiva, ofensiva, forte, poderosa) são as  $k$ -alianças, conceito apresentado por Shafique e Dutton em [41, 42, 43]. Onde eles definiram uma  $k$ -aliança defensiva como um conjunto  $A$  de vértices de  $G$  de modo que todos os vértices em  $A$  têm pelo menos  $k$  vizinhos a mais em  $A$  com relação aos que estão fora de  $A$ . Deste modo  $d_A(v) \geq d_{\bar{A}}(v) + k$ .

Um subconjunto  $S \subseteq V(G)$  é uma *clique* se  $G[S]$  é um subgrafo completo de  $G$ , isto é, há uma aresta entre dois quaisquer vértices em  $G[S]$ . Um vértice é *simplicial*, se todos os vértices de sua vizinhança aberta induzem uma clique em  $G$ . Uma *clique maximal* é uma clique que não está propriamente contida em outra clique. Uma *clique máxima* é a clique de máxima cardinalidade no grafo. O tamanho da maior clique de  $G$  (clique máxima) é denotada por  $\omega(G)$ .

Uma clique de  $G$  é denominada *simplex* se possui pelo menos um vértice simplicial. Um grafo  $G$  é denominado *grafo simplicial* se todo vértice é simplicial ou possui um vizinho que é simplicial. Na figura 2.2 temos dois grafos simpliciais.



**Figura 2.2:** Dois grafos simpliciais com vértices simpliciais em cinza

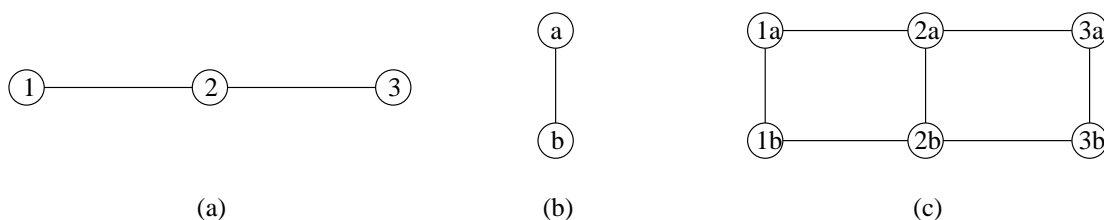
Diz-se que  $G$  é um grafo  $k$ -partido se o conjunto de vértices  $V$  pode ser particionado em  $k$  subconjuntos  $V_1, \dots, V_k$  disjuntos, de modo que toda aresta  $(v, w) \in E$

possui suas extremidades em conjuntos  $V_i$  e  $V_j$  distintos chamados de partições. Uma estrela  $S_n$  de  $n$  vértices é um grafo  $K_{1,t}$ , com  $t = n - 1$ .

O produto Cartesiano dos grafos  $G_1$  e  $G_2$ , denotado por  $G_1 \times G_2$ , é formado pelo conjunto de vértices  $V(G_1) \times V(G_2)$ , sendo que os vértices  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$  serão adjacentes se:

1.  $u_1 = v_1$  e  $(u_2, v_2) \in E(G_2)$ ; ou
2.  $u_2 = v_2$  e  $(u_1, v_1) \in E(G_1)$

A Figura 2.3 (c) apresenta um exemplo de grafo resultante do produto Cartesiano entre dois grafos caminho, neste caso  $P_3$  e  $P_2$ .



**Figura 2.3:** A Figura (c) é um exemplo de grafo resultante do produto cartesiano entre  $P_3 \times P_2$

Sejam  $G_1(V_1, E_1)$  e  $G_2(V_2, E_2)$  dois grafos. O produto lexicográfico é denotado como  $G_1 \circ G_2$  é formado pelo conjunto de vértices  $V(G_1) \times V(G_2)$ , sendo que os vértices  $u = (u_1, u_2)$  e  $v = (v_1, v_2)$  serão adjacentes se:

1.  $(u_1, v_1) \in E(G_1)$ ; ou
2.  $u_1 = v_1$  e  $(u_2, v_2) \in E(G_2)$

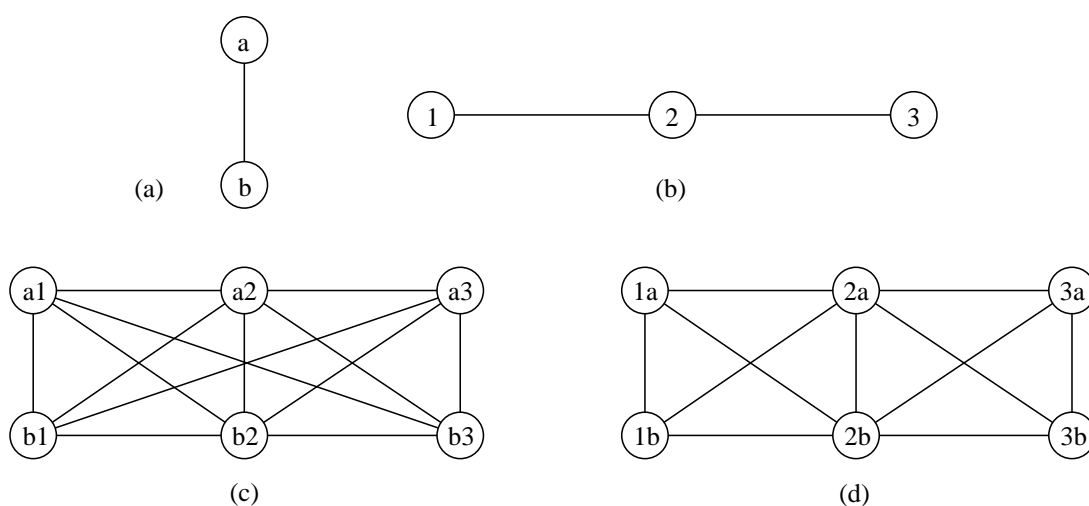
Para um subconjunto  $A$  de  $V(G \circ H)$ , denotamos a projeção de  $p_{(G)}(A) = \{v \in V(G) \mid \exists u \in V(H) \text{ tal que } (v, u) \in A\}$ .

A Figura 2.4 (c) apresenta um exemplo de grafo resultante do produto lexicográfico entre dois grafos caminho, neste caso  $P_3$  e  $P_2$ .

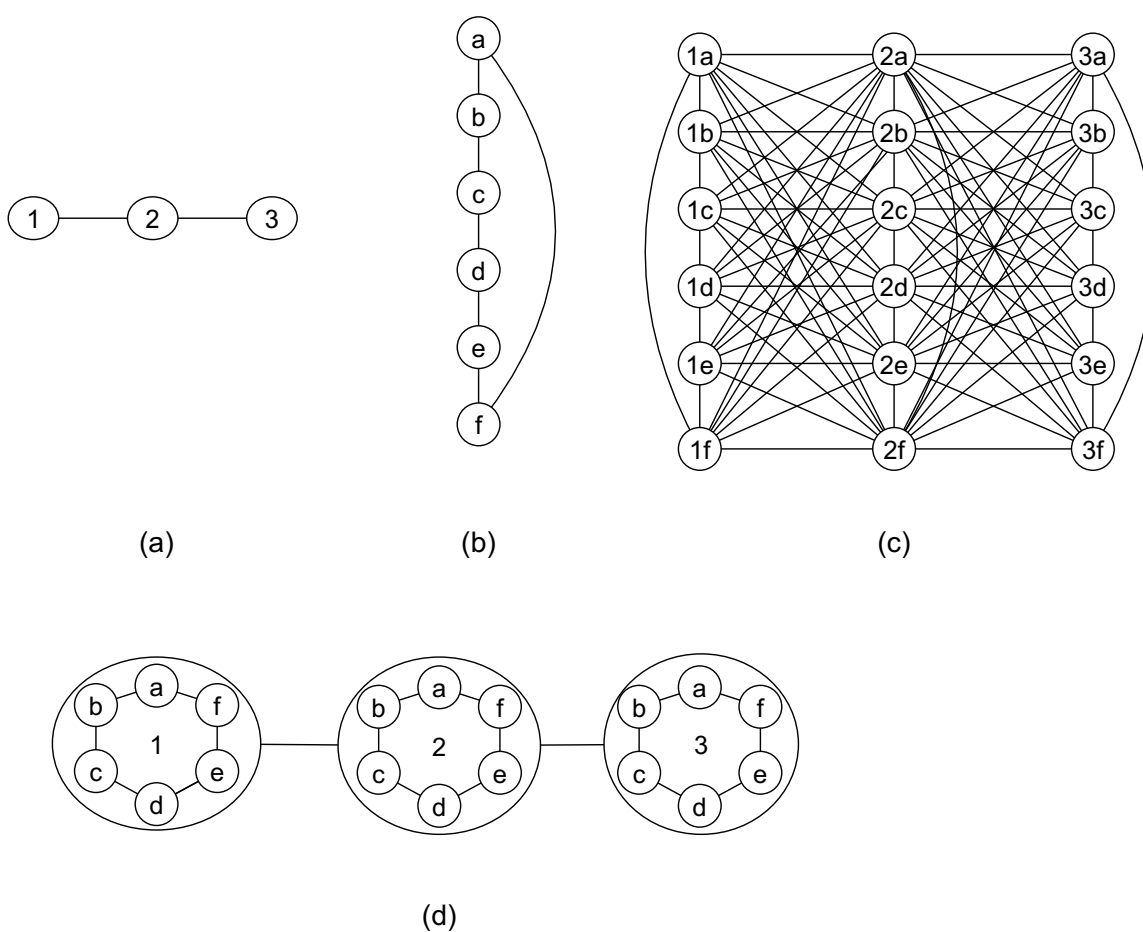
Para simplificação, a nossa representação de um produto lexicográfico entre dois grafos seguirá o exemplo do grafo (d) da Figura 2.5, isto quer dizer que, os grafos da Figura 2.5 (d) e (c) representam o mesmo resultado do produto lexicográfico entre os grafos da Figura 2.5 (a) e (b).

Uma generalização do produto Cartesiano, o produto complementar, foi introduzido por Haynes *et al* em [27]. O produto complementar é definido como  $G(R) \times H(S)$ ,  $R \subseteq V(G)$  e  $S \subseteq V(H)$ , como segue. O conjunto de vértices  $V(G(R) \times H(S))$  é:  $(u_i, v_j) : 1 \leq i, 1 \leq j \leq p$ . A aresta  $(u_i, u_j)(u_h, u_k)$  está em  $E(G(R) \times H(S))$ :

- se  $i = h$ ,  $u_i \in R$ , e  $\{v_j, v_k\} \in E(H)$ , ou  $i = h$ ,  $u_i \notin R$ , e  $\{v_j, v_k\} \notin E(H)$



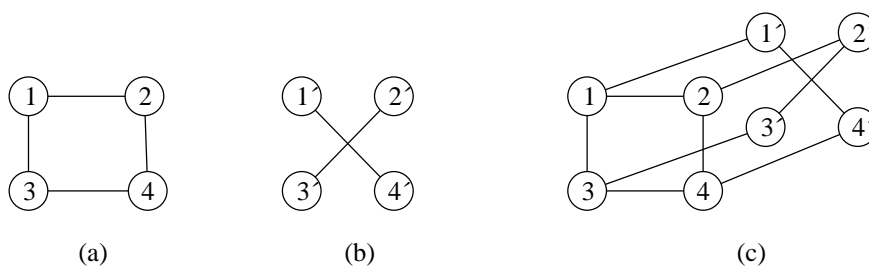
**Figura 2.4:** As Figuras (c) e (d) são exemplos de grafos resultantes do produto lexicográfico entre  $P_2 \circ P_3$  e  $P_3 \circ P_2$  respectivamente



**Figura 2.5:** Exemplos de representações de produto lexicográfico. Grafo  $P_3$  em (a), o grafo  $C_6$  na figura (b),  $P_3 \circ C_6$  em (c) e a nossa representação do produto lexicográfico em (d).

- se  $j = k$ ,  $u_j \in R$ , e  $\{v_i, v_h\} \in E(G)$ , ou  $j = k$ ,  $u_j \notin R$ , e  $\{v_i, v_h\} \notin E(G)$

Porém quando  $G$  é um grafo e  $\overline{G}$ , o seu complemento,  $G\overline{G}$  é um grafo formado da união disjunta de  $G$  e  $\overline{G}$  adicionando as arestas para o emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes de  $G$  e  $\overline{G}$  denomina-se de produto complementar de *prisma complementar* [27]. A Figura 2.6 (c) é um exemplo de um grafo prisma complementar do grafo  $C_4$ .



**Figura 2.6:** Exemplo de grafo prisma complementar onde (a) é o grafo  $G$ , (b)  $\overline{G}$  e (c) o grafo  $G\overline{G}$

---

## Alianças Defensivas e Ofensivas Globais em Alguns Grafos

---

Apresentamos neste capítulo alguns resultados sobre alianças globais, defensivas e ofensivas, em algumas classes de grafos, bem como em produto Cartesiano.

### 3.1 Alianças em Algumas Classes de Grafos

O conceito de aliança em grafos foi introduzido por Hedetniemi, Hedetniemi e Kristiansen em 2004 [32], onde alianças foram classificadas em defensiva, ofensiva e poderosa. Neste mesmo ano, Favaron *et al.* [19] exploraram alguns limites para aliança ofensiva e aliança ofensiva forte. Desde então, foram publicados diversos estudos que relacionam os parâmetros de alianças a outros parâmetros de um grafo ou propriedades matemáticas para classes específicas como por exemplo em árvores [7, 25], grafos cúbicos [37], grafos linha [45], grafos planares [38], dentre outros [1, 11, 15, 35]. Uma generalização de alianças defensivas foi apresentada por Shafique e Dutton em [41], onde eles definiram uma  $k$ -aliança defensiva como um conjunto  $S$  de vértices de um grafo  $G$  com a propriedade que todo vértice em  $S$  tem pelo menos  $k$  vizinhos em  $S$  do que fora de  $S$ . Alguns resultados sobre  $k$ -alianças defensivas podem ser encontrados em [39, 40, 47, 51] e sobre  $k$ -alianças ofensivas em [6, 22, 47]. Além disso, uma  $k$ -aliança poderosa é um conjunto de vértices de um grafo que é ao mesmo tempo uma  $k$ -aliança defensiva e uma  $(k + 2)$ -aliança ofensiva.

Haynes, Hedetniemi e Henning [26] definiram uma aliança como global se ela também é um conjunto dominante. Ainda, determinaram a cardinalidade mínima de uma ADG para algumas classes simples de grafos, como grafos completos, bipartidos completos, caminhos e ciclos, e apresentaram alguns limites para uma ADG mínima em grafos cúbicos, grafos bipartidos e árvores. De forma similar, Rodríguez-Velázquez e Sigarreta [35] apresentaram alguns limites inferiores e superiores de AOG mínima para alguns grafos, relacionando este número a outros parâmetros do grafo.



Como uma aliança global em um grafo  $G$  é também um conjunto dominante, mas não necessariamente de cardinalidade mínima, é comum que seja feita uma comparação entre os números  $\gamma_a(G)$ ,  $\gamma_o(G)$  e o número de dominação de  $G$ , denotado por  $\gamma(G)$ . Favaron [20] comparou os parâmetros de alianças globais e dominação independente em grafos gerais, bipartidos e árvores.

Algumas propriedades sobre alianças globais, defensivas e ofensivas, foram determinadas para grafos planares [38], onde foram obtidos vários limites sobre os diferentes tipos de alianças globais. Um limite superior para número mínimo de ADG para grafos estrela foi apresentado em [31]. Chellali e Haynes [15] e Bouzefrane e Chellali [7] apresentaram alguns limites superiores e inferiores para o número mínimo ADG e AOG de uma árvore.

Balakrishnan *et al.* [13] mostraram que os problemas de decisão para aliança defensiva global e aliança ofensiva global são ambos NP-completos para grafos gerais. O problema de decisão para determinar a  $k$ -aliança defensiva foi provado que é um problema NP-completo em [39], assim como o problema de encontrar o número da  $k$ -aliança ofensiva ótima (global) [22].

Atualmente um outro tópico interessante de pesquisa está relacionado ao comportamento de diversos parâmetros de grafos no produto de grafos. Inclusive, um dos problemas de dominação mais antigos está relacionado ao produto Cartesiano de grafos. Em 1963, Vizing [49] conjecturou que o número de dominação do produto cartesiano de grafos é maior ou igual ao produto do número de dominação de seus fatores. Como ainda não foi possível provar esta conjectura para grafos gerais, muitos pesquisadores têm mostrado parcialmente a validade da conjectura de Vizing para algumas classes específicas de grafos como em [8, 10, 9]. Yero e Rodríguez-Velázquez [53] apresentaram em 2013 uma conjectura de Vizing para o número da aliança ofensiva global e provaram sua validade para algumas famílias de grafos. Ainda em 2013 estes mesmos autores também publicaram em [54] um resumo com os principais resultados obtidos para aliança defensiva.

No ano seguinte, em 2014, Fernau e Rodríguez-Velázquez [21] publicaram um *survey* de aliança global de vários tipos e a relação entre alguns parâmetros em grafos. Também foi sugerido uma unificação dos trabalhos entre os conceitos de aliança e dominação.

Mostramos na Seção 3.2 os principais resultados sobre alianças e produtos de grafos.

## 3.2 Alianças e Produto Cartesiano de Grafos

Recentemente alguns estudos estão relacionando alguns parâmetros de alianças ao produto Cartesiano de grafos.

Bermudo *et al.* [6] apresentaram um limite superior para o número da  $k$ -aliança ofensiva (global) de  $G_1 \times G_2$ , para alguns valores específicos de  $k$ . Em 2011, Yero *et al.* [50] apresentaram algumas relações que existem entre  $G_1 \times G_2$  para  $(k_1 + k_2)$ -aliança defensiva (global). Neste mesmo ano Sigarreta *et al.* [44] também apresentaram um caso particular de produto Cartesiano de grafos e  $k_i$ -aliança ofensiva global de  $G_1$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

Para os produtos de ciclos e caminhos, Chang *et al.* [14] apresentaram, nos Teoremas 3.1, 3.2 e 3.3, limites superiores para  $\gamma_a$ .

**Teorema 3.1** [14] *Sejam  $P_n$  e  $P_m$  dois grafos caminho. Se  $2 \leq n \leq m$ , então  $\gamma_a(P_n \times P_m) = \frac{nm}{3}$  se  $nm \equiv 0 \pmod{3}$ , e*

$$\gamma_a(P_n \times P_m) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{m}{3} \rfloor n + \lceil \frac{n}{2} \rceil + a, & \text{se } n \equiv m \equiv 1 \pmod{3}, \\ \lfloor \frac{m}{3} \rfloor n, & \text{se } n \equiv m \equiv 2 \pmod{3}, \\ \min\{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + b, \lfloor \frac{m}{3} \rfloor n\}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{3} \text{ e } m \equiv 2 \pmod{3}, \\ \min\{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + a, \lfloor \frac{m}{3} \rfloor n\}, & \text{se } n \equiv 2 \pmod{3} \text{ e } m \equiv 1 \pmod{3}, \end{cases}$$

$$\text{onde } a = 1 + \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor - \lceil \frac{n+2}{4} \rceil \text{ e } b = 1 + \lfloor \frac{m+2}{4} \rfloor - \lceil \frac{m+2}{4} \rceil.$$

**Teorema 3.2** [14] *Seja  $C_n$  um grafo ciclo e  $P_m$  um grafo caminho. Se  $n \geq 3$ ,  $m \geq 2$ , então  $\gamma_a(C_n \times P_m) = \lceil \frac{nm}{3} \rceil$  se  $nm \equiv 0 \pmod{3}$  ou  $n \geq 7$ ,  $n \equiv 1 \pmod{6}$ , e  $m = 2$  ou  $4$ . E*

$$\gamma_a(C_n \times P_m) \leq \begin{cases} \min\{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor n, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor m\}, & \text{se } m \equiv 2b \pmod{3} \text{ e } n \not\equiv 0 \pmod{3}, \\ \min\{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor m, \lfloor \frac{m}{3} \rfloor n + \lceil \frac{n}{2} \rceil + a\}, & \text{se } m \equiv 1 \pmod{3} \text{ e } n \not\equiv 0 \pmod{3}, \end{cases}$$

onde  $a = 1 + \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor - \lceil \frac{n+2}{4} \rceil$ . Contudo, se  $n \geq 7$ ,  $n \equiv 1 \pmod{6}$ , e  $m \equiv 2, 4 \pmod{6}$ . Então

$$\gamma_a(C_n \times P_m) \leq \begin{cases} \frac{nm}{3} + \min\{\frac{m}{6}, \frac{n}{3}\}, & \text{se } m \equiv 2 \pmod{6}, \\ \frac{nm}{3} + \min\{\frac{m}{6}, \frac{n}{6} + \frac{3}{2} + \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor - \lceil \frac{n+2}{4} \rceil\}, & \text{se } m \equiv 4 \pmod{6}, \end{cases}$$

**Teorema 3.3** [14] *Sejam  $C_n$  e  $C_m$  dois grafos ciclo quaisquer. Se  $3 \leq n \leq m$ , então  $\gamma_a(C_n \times C_m) = \lceil \frac{nm}{3} \rceil$ .*

*Se  $nm \equiv 0 \pmod{3}$ , ou  $n = 4$ ,  $m \geq 7$ ,  $m \equiv 1 \pmod{6}$ . E*

$$\gamma_a(C_n \times C_m) \leq \min\{\lfloor \frac{m}{3} \rfloor n, \lfloor \frac{n}{3} \rfloor m\}, \text{ se } nm \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Yero e Rodríguez-Velázquez [53] apresentaram um conjectura como a de Vizing para o número da aliança ofensiva global. Eles apresentaram algumas fórmulas fechadas para  $\gamma_o$  para algumas famílias de produto Cartesiano de grafos, mostrando que a Conjectura 1 tem validade para estes grafos.

**Conjectura 1** [53] *Para quaisquer grafos  $G$  e  $H$   $\gamma_o(G \times H) \geq \gamma_o(G)\gamma_o(H)$*

Na Tabela 3.1 resumimos os principais resultados de Yero e Rodríguez-Velázquez [53] para o número da aliança ofensiva global entre grafos caminho, ciclo e completo.

**Tabela 3.1:** *Número da AOG em produtos Cartesianos* [53]

Grafo	$\gamma_o$
$G \times P_m$	$\geq \lceil \frac{(m-1)\gamma_o(G)}{2} \rceil + \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$
$G \times C_m$	$\geq \lceil \frac{m\gamma_o(G)}{2} \rceil$
$K_n \times P_m$	$= \lfloor \frac{nm}{2} \rfloor$
$C_n \times C_m$	$= \lfloor \frac{nm}{2} \rfloor$
$K_n \times P_m$	$= \lfloor \frac{nm}{2} \rfloor$
$K_n \times C_m$	$= \lfloor \frac{nm}{2} \rfloor$
$P_n \times C_m$	$= \frac{nm}{2}$ , se $n$ for par, $= \frac{(n-1)m}{2} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ , se $n$ for ímpar
$P_n \times P_m$	$= \frac{nm}{2}$ , se $m$ e $n$ pares $= \frac{n(m-1)}{2} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , se $n$ par e $m$ ímpar $\geq \frac{(n-1)(m-1)}{2} + \lceil \frac{n}{3} \rceil + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ , se $n$ e $m$ ímpares $\leq \frac{n(m-1)}{2} + \lceil \frac{n}{3} \rceil$ , se $n$ e $m$ ímpares
$K_n \times K_m$	$= \lfloor \frac{nm}{2} \rfloor$ , se $n \equiv m \pmod{2}$ $\leq \lfloor \frac{nm}{2} \rfloor$ , se $n \not\equiv m \pmod{2}$ $\geq \lceil \frac{nm(n+m-1)}{2(n+m)} \rceil$ , se $n \not\equiv m \pmod{2}$

## Resultados

Como resultados, mostramos neste capítulo algumas fórmulas fechadas, limites superiores e conjecturas para aliança ofensiva e defensiva global para o produto lexicográfico de grafos caminho, ciclos e grafos estrela, e alguns limites para os números da aliança defensiva global para prismas complementares e grafos simpliciais.

### 4.1 Aliança Defensiva Global em Grafos Simpliciais e Prisma Complementar

Apresentamos um limite para  $\gamma_a(G)$  nos grafos simpliciais em função do número de vértices de cada simplex do grafo.

**Lema 4.1** *Seja  $G$  um grafo simplicial com  $t$  simplexes maximais  $S = S_1, S_2, \dots, S_t$ . Então  $\gamma(G) \leq t$ ;*

*Prova.* Seja  $B \subset V(G)$ , um conjunto dominante de  $G$ , de modo que, todo  $S_i$  possui um vértice em  $B$ . Pela definição de grafo simplicial,  $\forall v(S_i)$ , ou é simplicial ou é vizinho de um simplicial. Portanto,  $S_i \setminus B$  tem algum vizinho em  $B$ .  $|N_{S_i \setminus B}[v_i]| = |S_i|$ . Logo, por definição de grafo simplicial, todo vértice  $V(G) \setminus B$  tem algum vizinho em  $B$ , e portanto,  $B$  é um conjunto dominante de  $G$ .  $\square$

**Proposição 4.2** *Seja  $G$  um grafo simplicial com  $t$  simplexes maximais  $S = S_1, \dots, S_t$ . Então*

$$\gamma_a(G) \leq \sum_{i=1}^t \left\lceil \frac{|S_i|}{2} \right\rceil$$

*Prova.* Seja  $A \subseteq G$  uma ADG de  $G$  e  $A_i \subset A$ , para  $i$  de 1 até  $t$ . Se  $|S_i \setminus A_{i-1}| \geq \lceil \frac{|S_i|}{2} \rceil$ , então o conjunto  $A_i = A_{i-1} \cup S'_i$ , onde  $S'_i \subseteq S_i \setminus A_{i-1}$  e  $|S'_i| = \lceil \frac{|S_i|}{2} \rceil$ ; se não  $A_i = A_{i-1} \cup S_i$ .

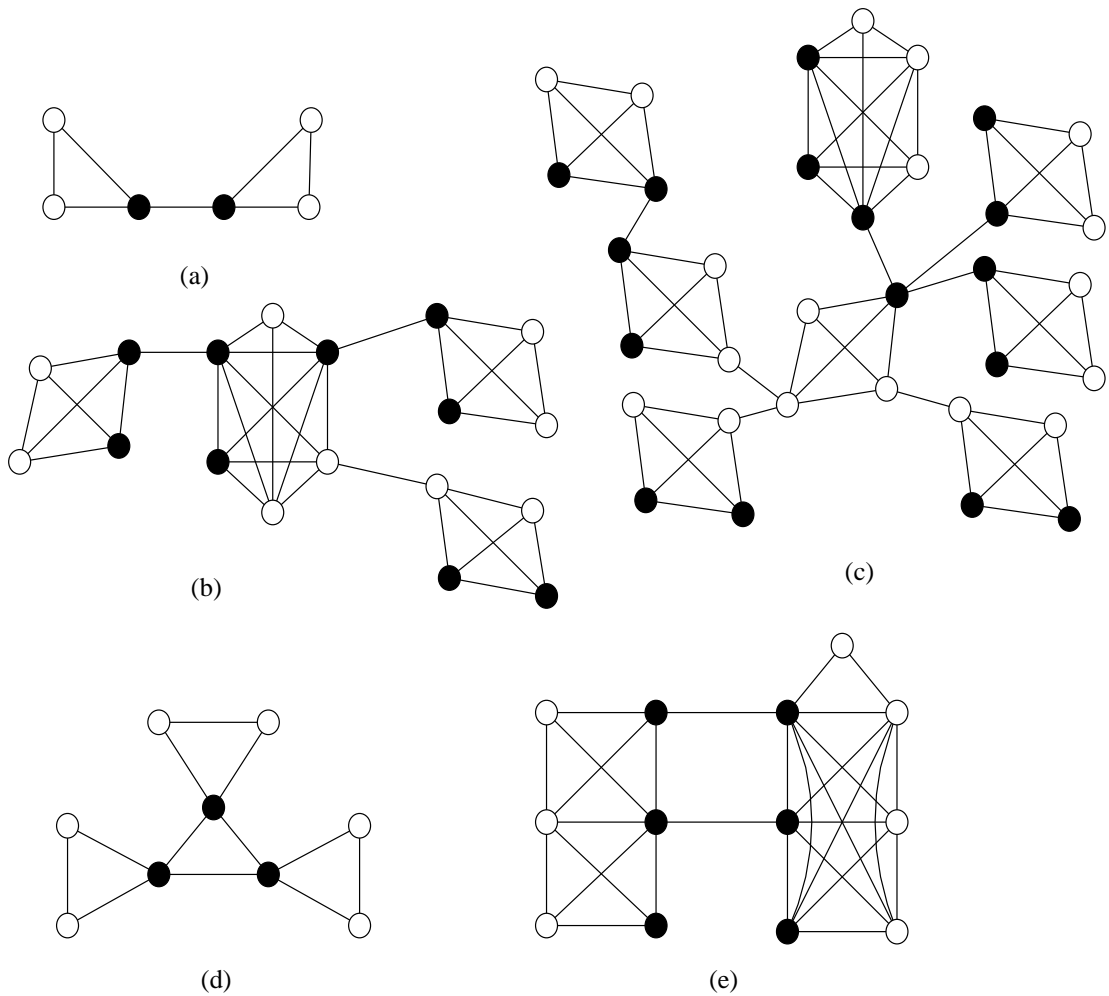
Uma vez que  $|A_i \setminus A_{i-1}| \leq \lceil \frac{|S_i|}{2} \rceil$ , para  $1 \leq i \leq t$ , portanto  $|A| \leq \sum_{i=1}^t \lceil \frac{|S_i|}{2} \rceil$ , então  $A_t$  permanece uma ADG de  $G$ .

Observe que,  $|A_t \cap S_i| \geq \lceil \frac{|S_i|}{2} \rceil$  para  $1 \leq i \leq t$ . Isto implica, pelo Lemma 1, que  $A_t$  é um conjunto dominante de  $G$ . Assim, considere  $v \in A_t$  e sejam  $C_1, \dots, C_s, \dots, C_{s'}$  os conjuntos que contêm os simplexos  $v$  tais que  $C_i \subseteq A_t$  se e somente se  $i \leq s$ . Note que, a vizinhança fechada de um vertice é a união dos simplexos que o contêm.

Agora, para todo  $C_i$ ,  $s < i \leq s'$ , observe que existe  $C'_i \subseteq C_i \cap A_t$  com  $|C'_i| = \lceil \frac{|C_i|}{2} \rceil$ , tal que  $C'_i \cap C'_j = \emptyset$  quando  $i \neq j$ . Portanto,  $N' = \bigcup_{i=1}^s C_i \setminus \bigcup_{j=s+1}^{s'} C_j$ , temos:

$$\begin{aligned} 2|N[v] \cap A_t| &= 2|N'| + 2 \sum_{i=s+1}^{s'} |C'_i| \geq \\ &\geq 2|N'| + \sum_{i=s+1}^{s'} |C_i| \geq |N(v)| \end{aligned}$$

, O que significa que  $A_t$  é uma aliança defensiva de  $G$ . O que completa a prova.  $\square$



**Figura 4.1:** Grafos que atendem ao limite fornecido na Proposição 4.2 com os vértices do conjunto- $\gamma_a$  em preto.

Em [27] foi apresentada a Proposição onde  $\gamma(G\bar{G}) \leq \gamma(G) + \gamma(\bar{G})$  para os grafos prismas complementares. De modo muito similar a Proposição 4.3 mostra que este limite inferior também é válido para  $\gamma_a$ .

**Proposição 4.3** *Seja  $G$  um grafo qualquer. Então  $\gamma_a(G\bar{G}) \leq \gamma_a(G) + \gamma_a(\bar{G})$ .*

*Prova.* Para o nosso limite inferior, o caso onde  $G$  ou  $\bar{G}$  é um grafo completo é facilmente verificável. Então assumimos que nem  $G$  nem  $\bar{G}$  são grafos completos. Agora assumimos que  $A$  é um conjunto- $\gamma(G\bar{G})$ ,  $A' = A \cap V(G)$  e  $A'' = A \cap V(\bar{G})$ . Se  $A'$  é uma ADG de  $G$  (respectivamente,  $A''$  é uma ADG de  $\bar{G}$ ), então nós terminamos. Sabemos que uma ADG é também um conjunto dominante. Deste modo, assumimos que  $D \subseteq V(G)$  e não é dominado por  $A'$ . Então este  $D$  é dominado por  $A''$  e cada vértice de  $A''$  pode dominar no máximo um vértice em  $D$ ,  $|D| \leq |A''|$ . Mas  $A' \cup D$  é uma ADG de  $G$ , também  $\gamma_a(G) \leq |A' \cup D| = |A'| + |D| \leq |A'| + |A''| = |A| = \gamma_a(G\bar{G})$ .  $\square$

A seguir apresentamos algumas fórmulas fechadas e limites superiores para Aliança Defensiva Global e Produto Lexicográfico de caminhos e ciclos e grafos estrela.

## 4.2 Aliança Defensiva Global e Produto Lexicográfico de Caminhos e Ciclos e Grafos Estrela

Primeiramente consideramos os produtos lexicográficos dos grafos  $G \circ H$ , onde  $G$  é um grafo conexo de ordem  $n$  e  $H$  é um grafo conexo de ordem  $m$ , para  $n \geq 2$ , e  $m \geq 3$ . Neste caso, os vértices de uma cópia de  $H$  têm  $d_H(v)$  vizinhos no próprio subgrafo, mais  $d_G(v) \times m$  dos subgrafos vizinhos. Logo, para um vértice  $v$  que pertence a uma ADG  $A$  deste grafo, quando  $n \geq 2$  e  $m \geq 3$ , apresentamos no Lema 4.4 limites inferiores para o número de vizinhos de  $v$  que estão fora de seu próprio grafo  $H$ .

**Lema 4.4** *Seja  $A$  uma ADG mínima de  $G \circ H$  e  $n \geq 2$ ,  $m \geq 3$ . Para qualquer vértice  $v \in V(G)$ , seja  $v \in \{A, H_i\}$ , para  $1 \leq i \leq n$ ,  $x_i = |(H)_i \cap A|$ ,  $w_i = |N_A[v]| - x_i$  e  $x_i + w_i = |N_A[v]|$ .*

*Se  $x_i \neq 0$ , as seguintes desigualdade são verdadeiras:*

1. se  $1 < d_G(i) < n$ ,  $w_i \geq \left\lceil \frac{d_G(i) \cdot \{m-1\}}{2} \right\rceil$ ,
2. se  $d_G(i) = 1$ ,  $w_i \geq \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$ .

*Prova.* Seja  $v \in A$ . O resultado segue do fato de que  $|N_A(v) \cap (H)_i| \in \{1, \dots, n\}$  e  $G \circ H$  não seja um grafo completo

(i) Considere  $1 < d_G(i) < n$ . Note que  $d_{G \circ H}(v) = d_G(i) \cdot m + d_H(v)$ . Para  $A$  ser uma ADG, é necessário que  $|N_A[v]| \geq \left\lceil \frac{d_{G \circ H}(v)+1}{2} \right\rceil$ ,  $|N_A[v]| \geq \left\lceil \frac{d_G(i) \cdot m + d_H(v) + 1}{2} \right\rceil$ . Então

$x_i + w_i \geq \left\lceil \frac{d_G(i) \cdot m + d_H(v) + 1}{2} \right\rceil$ . Se  $d_H(v) = m - 1$  e  $x_i = m$ , então  $w_i \geq \left\lceil \frac{d_G(i) \cdot m}{2} \right\rceil$ . Se  $|N_A(v) \cap (H)_i| = 0$ , então  $v \in A \cap (H)_i$ , então  $x_i = 1$  e são necessários mais  $\left\lceil \frac{d_G(i) \cdot \{m-1\}}{2} \right\rceil$  vértices dos subgrafos vizinhos para que  $v$  seja um elemento da ADG. Caso  $1 < x_i < m$ , como teremos pelo menos dois vértices de  $(H)_i$  e que não sejam vértice folha, digamos  $u$  e  $y$ , tais  $|N_A(u) \cap (H)_i| > m$  e  $|N_A(y) \cap (H)_i| > m$ , é necessário que pelo menos  $\left\lceil \frac{d_G(i) \cdot m}{2} \right\rceil$  vértices de subgrafos vizinhos também estejam em  $A$ .

(ii) Considere  $d_G(i) = 1$ . Note que  $d_G(v) = m + d_H(v)$ . Para  $A$  ser uma ADG, é necessário que  $|N_A[v]| \geq \left\lceil \frac{m + d_H(v)}{2} \right\rceil$ . Então  $x_i + w_i \geq \left\lceil \frac{m + d_H(v) + 1}{2} \right\rceil$ . Se  $d_H(v) = m - 1$  e supondo  $x_i = m$ , então  $w_i = 0$ . Contudo  $G \neq P_2$  e  $H \neq K$ , portanto  $v_i$  não será um conjunto dominante, portanto  $w_i > 0$ . Se  $|N_A(v) \cap (H)_i| = 0$ , então  $v \in A \cap (H)_i$ , então  $x_i = 1$  e são necessários pelo menos mais  $\left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$  vértices dos dois subgrafos vizinhos para que  $v$  seja um elemento da ADG. □

Um conjunto dominante total em um grafo  $G$ , denotado por  $\gamma_t(G)$ , é um conjunto  $A \subseteq V(G)$  tal  $A$  é um conjunto dominante de  $G$  e todo vértice pertencente a  $A$  precisa ser dominado por outro vértice de  $A$ .

Sejam  $G$  e  $H$  dois grafos. Para o produto lexicográfico  $G \circ H$ , onde  $v \in V(G)$ , denotamos por  $(G)_v$ , o subgrafo  $\{v\} \circ H$  de  $G \circ H$  e para um subconjunto  $A$  de  $V(G \circ H)$ , denotamos por  $p_{(G)}(A) = \{\exists u \in V(H)(v, u) \in A\}$

Mostramos na Proposição 4.5 que a projeção de um conjunto- $\gamma_a$  de  $G_n \circ H_m$  é um conjunto dominante total.

**Proposição 4.5** *Seja  $A$  um conjunto- $\gamma_a$  de  $G_n \circ H_m$ ,  $G$  e  $H$  grafos conexos com  $n \geq 2$  e  $m \geq 3$ . Exceto,  $G \circ H$ , ser um grafo completo. Então  $p_{(G)}(A)$  é um conjunto dominante total em  $G$ .*

*Prova.* Seja  $D = p_{(G)}(A)$ . Pela definição de ADG,  $A$  é um conjunto dominante. Seja  $(H)_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , tal que  $x_i = |(H)_i \cap A| \neq 0$ . Logo,  $i \in D$ .

Pelo Lema 4.4,  $A$  contém pelo menos um vértice que está em  $w_i$  para  $w_i = |N_A(v)| - x_i \neq 0$ . Portanto,  $\exists N_{A \setminus (H)_i \cap A}(v) \in D$  e cada vértice de  $D$  tem pelo menos mais um vizinho em  $D$ . Logo,  $p_{(G)}(A)$  é um conjunto dominante total em  $G$ . □

Em [14] os autores apresentam um limite inferior para  $\gamma_a$  de  $G$  de ordem  $n$  e de grau máximo  $\Delta$ ,

$$\gamma_a(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\frac{\Delta+3}{2}} \right\rceil$$
 com essa proposição é possível estabelecer um limite inferior para  $\gamma_a$  de  $G_1 \circ G_2$ .

**Proposição 4.6** *Sejam  $G_1 \circ G_2$ ,  $G_1$  e  $G_2$  grafos conexos com  $n \geq 2$  e  $m \geq 3$  ordens de  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente e os graus máximos de  $G_1$  e  $G_2$  são  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ , respectivamente então*

$$\gamma_a(G_1 \circ G_2) \geq \left\lceil \frac{n \cdot m}{\frac{\Delta_1 \cdot m + \Delta_2 + 3}{2}} \right\rceil$$

Após considerarmos um limite inferior para o produto lexicográfico para grafos gerais, observamos a necessidade de continuarmos com os estudos para produtos lexicográficos para grafos caminho, ciclo e estrela.

O número de dominação total de  $P_n$  e  $C_n$ , para  $n \geq 3$ , é bem conhecido:  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ . Haynes, Hedetniemi e Henning [26] estabeleceram  $\gamma_a(P_n)$  e  $\gamma_a(C_n)$ ,  $n \geq 3$  em função do número de dominação total desses grafos.

**Proposição 4.7** [26] *Para  $n \geq 2$ ,*

1.  $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n)$ , com exceção de  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , onde  $\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n) - 1$  e
2.  $\gamma_a(C_n) = \gamma_t(C_n)$

Seja  $G \circ H$ , onde  $G = P_n$  ou  $C_k$ , para  $n \geq 2$  e  $k \geq 3$ , e  $H \in \{P_m, C_m, S_m\}$  para  $m \geq 5$ . Os vértices de uma cópia de  $C_m$  têm exatamente dois vizinhos no próprio ciclo. Os vértices de uma cópia de  $P_m$  e  $S_m$  possuem exatamente um vizinho no próprio subgrafo, quando vértice folha. Logo, para um vértice  $v$  que pertence a uma ADG  $A$  deste grafo, quando  $n \geq 2$  e  $m \geq 5$ , apresentamos no Lema 4.8 limites inferiores para o número de vizinhos de  $v$  que estão fora de seu próprio ciclo ou caminho .

**Lema 4.8** *Seja  $A$  uma ADG mínima de  $G \circ H$ , para  $G \equiv P_n$  ou  $C_k$  para  $n \geq 2$ ,  $k \geq 3$  e  $m \geq 3$ . Para qualquer  $i \in V(G)$ , onde  $x_i = |(C_m)_i \cap A|$ , Sejam  $G = C_k$ ,  $x_{-1} = x_m$  e  $x_{m+1} = x_1$  e se  $G = P_n$ ,  $x_{-1} = x_{m+1} = 0$ . Se  $x_i \neq 0$ , as seguintes desigualdades são verdadeiras:*

1. se  $d_G(i) = 2$ ,  $x_{i-1} + x_{i+1} \geq m - 1$ . Além disso, o limite é exato se  $x_i = m$  se  $H = C_m$ .
2. se  $d_G(i) = 1$ ,  $x_{i-1} + x_{i+1} \geq \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ . Além disso, quando  $G = P_n$  os limites são exatos se  $x_i = m$  e  $m$  é par, e para todo  $m$  ímpar.

*Prova.* Seja  $v \in A$ . O resultado segue do fato de que  $|N_A(v) \cap (H)_i| \in \{1, 2, 3\}$ .

(i) Considere  $d_G(i) = 2$ . Note que  $d_G(v) = 2m + 1$  para vértices folhas e  $d_G(v) = 2m + 2$  para o vértice não folha. Para  $A$  ser uma ADG, é necessário que, quando  $v$  é folha,  $N_A[v] \geq \lceil \frac{2m+2}{2} \rceil = m + 1$ . Se, para todo  $v \in A \cap (H)_i$  folha,  $N_A(v) \cap (H)_i = 1$ ,  $\forall v \in A \cap (H)_i$  são necessários mais  $m - 1$  vértices dos  $H$  vizinhos para que  $v$  seja um elemento da ADG. Caso  $v$  não seja um vértice folha e  $|N_A(v) \cap (H)_i| = 0$  então  $N_A[v] \geq \lceil \frac{2m+3}{2} \rceil = m + 2$ . E se  $|N_A(v) \cap (H)_i| \geq 1$ , significa que, ou seu vértice vizinho é um vértice folha, tratado no caso anterior, ou algum outro vértice não folha de  $(H)_i$  está em  $A$  é necessário que pelo menos  $m$  vértices de  $H$  vizinhos também estejam em  $A$ .



(ii) Considere  $d_G(i) = 1$ . Note que  $d_G(v) = m + 1$  para vértices folhas e  $d_G(v) = m - 1$  para os vértices não folha. Para  $A$  ser uma ADG é necessário que, quando  $v$  é folha,  $N_A[v] \geq \lceil \frac{m+2}{2} \rceil = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$ . Se  $|N_A(v) \cap (H)_i| = 1$ , para todo  $v \in A \cap (H)_i$  folha,  $x_i = m$  e são necessários mais  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  vértices de  $(H)_{i+1}$  ou do  $(H)_{i-1}$ , para que  $v$  seja um elemento da ADG, já que neste caso um dos dois grafos  $H$  não existe. Caso  $v$  não seja um vértice folha e  $|N_A(v) \cap (H)_i| = 0$ , então  $N_A[v] \geq \lceil \frac{2m+3}{2} \rceil = m + 2$ . E se  $|N_A(v) \cap (H)_i| \geq 1$  significa que, ou seu vértice vizinho é um vértice folha, tratado no caso anterior, ou algum vértice não folha de  $(H)_i$  está em  $A$ , portanto, é necessário que pelo menos  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  vértices do caminho  $(H)_{i+1}$  estejam em  $A$ . □

Nos resultados seguintes, estabelecemos valores para  $\gamma_a(G \circ C_m)$  e  $\gamma_a(G \circ H)$  quando  $G$  é um caminho ou um ciclo com até 7 vértices e  $H \in \{P_m, S_m\}$  com  $m \geq 5$ . Em resumo, mostramos nas Proposições 4.9 a 4.13 e 4.18 a 4.21 os resultados da Tabela 4.1:

**Tabela 4.1:** Resultados das Proposições 4.9 a 4.13 e 4.18 a 4.21.

$\gamma_a(P_2 \circ C_m)$	$= 2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$	
$\gamma_a(P_3 \circ C_m)$	$= m + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$	
$\gamma_a(G \circ H)$	$= m + \lceil \frac{m}{2} \rceil$	se $G \in \{P_3, C_3\}$
$\gamma_a(G \circ H)$	$= 2m - 1$	se $G \in \{P_4, C_4, P_5, C_5\}$ e se $H \cup C_m$
$\gamma_a(G \circ H)$	$= 2m + 2$	se $G \in \{P_6, C_6\}$
$\gamma_a(G \circ C_m)$	$= 2m + 4$	se $G \in \{P_6, C_6\}$
$\gamma_a(G \circ H)$	$= 3m$	se $G \in \{P_7, C_7\}$
$\gamma_a(G \circ C_m)$	$= 3m + 1$	se $G \in \{P_7, C_7\}$

**Proposição 4.9** Para  $m \geq 5$ ,  $\gamma_a(P_2 \circ C_m) = 2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ .

*Prova.* Considere  $A \subseteq V(P_2 \circ C_m)$  contendo  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de cada  $(C_m)_i$ ,  $i = 1, 2$ . Note que todo vértice em  $(P_2 \circ C_m) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$  e portanto  $A$  é um conjunto dominante de  $P_2 \circ C_m$ . Para cada  $v \in A$ ,  $N_A[v] \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 = \lceil \frac{N[v]}{2} \rceil$  e portanto  $A$  é uma ADG de  $P_2 \circ C_m$ . Logo,  $\gamma_a(P_2 \circ C_m) \leq 2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ , que é igual a  $m - 1$  se  $m$  ímpar é e  $m$ , se  $m$  é par.

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $P_2 \circ C_m$ . Seja  $x_i = |(C_m)_i \cap A'|$ ,  $i = 1, 2$ . Pelo Lema 4.8,  $x_1, x_2 \geq \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  e então  $x_1 + x_2 \geq 2 \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ , que resulta em  $m - 1$  se  $m$  é ímpar e  $m - 2$ , se  $m$  é par. Para o caso de  $m$  par, pelo Lema 4.8, o limite inferior ocorre somente se  $x_i = m$ . Se isto ocorre para algum  $i = 1, 2$ ,  $x_1 + x_2 \geq m + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ . Logo,  $x_1, x_2 < m$ , o que implica em  $x_1, x_2 \geq \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 1$  e  $x_1 + x_2 \geq 2 \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 2 = m$ . Logo,  $|A'| \geq 2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ , o que completa a prova. □

**Proposição 4.10** Para  $m \geq 5$ ,  $\gamma_a(P_3 \circ C_m) = m + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ .

*Prova.* Considere  $A \subseteq V(P_3 \circ C_m)$  contendo  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de  $(C_m)_2$  e  $m$  vértices de  $(C_m)_3$ . Todo vértice em  $(P_3 \circ C_m) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$  e portanto  $A$  é um conjunto dominante de  $P_3 \circ C_m$ . Para cada  $v \in A$ ,  $N_A[v] \geq \frac{N[v]}{2}$  e portanto  $A$  é uma ADG de  $P_3 \circ C_m$ . Logo,  $\gamma_a(P_3 \circ C_m) \leq m + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ .

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $P_3 \circ C_m$ . Seja  $x_i = |(C_m)_i \cap A'|$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Pela Proposição 4.5,  $p_{(P_3)}(A')$  é um conjunto dominante total em  $P_3$ . Temos dois conjuntos dominantes totais em  $P_3$ , simetricamente distintos. Nos dois casos, pelo Lema 4.8, temos

$$\begin{aligned} x_2 &\geq \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor \\ x_1 + x_3 &\geq m - 1 \end{aligned}$$

Se  $x_2 = m$ , temos  $|A'| \geq 2m - 1$  que contraria que  $\gamma_a(P_3 \circ C_m) \leq m + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ . Logo,  $x_2 < m$  o que implica, pelo Lema 4.8, em  $x_1 + x_3 \geq m$ . Temos então  $\gamma_a(P_3 \circ C_m) = x_1 + x_2 + x_3 \geq m + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ .  $\square$

**Proposição 4.11** Para  $m \geq 5$  e  $G \in \{P_4, P_5, C_4, C_5\}$ ,  $\gamma_a(G \circ C_m) = 2m - 1$ .

*Prova.* Considere  $A \subseteq V(G \circ C_m)$  contendo  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de  $(C_m)_2$ ,  $m$  vértices de  $(C_m)_3$  e  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de  $(C_m)_4$ . Note que  $|A| = 2m - 1$ . Um exemplo de conjunto- $\gamma_a$  para  $C_4 \circ C_m$  é obtido conforme a Figura 4.2. Todo vértice em  $(G \circ C_m) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$  e portanto  $A$  é um conjunto dominante de  $G \circ C_m$ . Para cada  $v \in A$ ,  $N_A[v] \geq m + 2 = \lceil \frac{N[v]}{2} \rceil$ , e portanto  $A$  é uma ADG de  $G \circ C_m$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ C_m) \leq 2m - 1$ .

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $G \circ C_m$ . Seja  $x_i = |(C_m)_i \cap A'|$ ,  $i = 1, \dots, n$ , onde  $n = |V(G)|$ . Pela Proposição 4.5,  $p_{(G)}(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ . Vamos utilizar os limites do Lema 4.8 para demonstrar os dois casos:

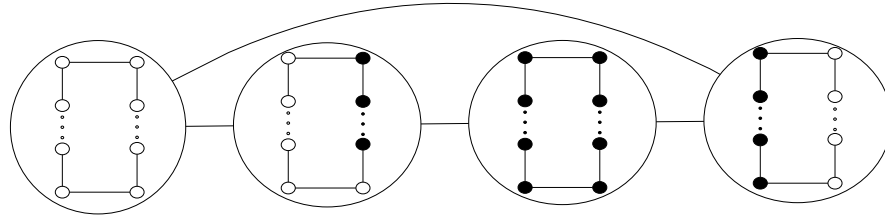
**Caso 1:**  $n = 4$ .

Suponha, primeiramente, que  $|p_{(G)}(A')| = 2$  que é a cardinalidade mínima de um conjunto dominante total em  $G$ . Assumimos, por simetria, que  $x_2 \neq 0$  e  $x_3 \neq 0$ . Pelo Lema 4.8, temos  $x_2, x_3 \geq m - 1$  o que resulta em  $x_2 + x_3 \geq 2m - 2$ . Para que algum limite ocorra, é preciso que  $x_2 = m$  ou  $x_3 = m$ , o que resulta em  $x_2 + x_3 \geq 2m - 1$ . Se  $|p_{(G)}(A')| = 3$ , assumimos simetricamente que  $x_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Assim,  $x_2 \geq m - 1$  e  $x_1 + x_3 \geq m - 1$  e para que este último limite ocorra, é preciso que  $x_2 = m$ , o que resulta em  $x_1 + x_2 + x_3 \geq 2m - 1$ . Se  $x_i \neq 0$ , para  $i = 1, \dots, 4$ , temos  $x_1 + x_3 \geq m - 1$  e  $x_2 + x_4 \geq m - 1$ .

Para que os limites ocorram,  $x_i = m$ . Se todo  $x_i = m$ , temos  $|A'| \geq 4m$  o que contraria que  $\gamma_a(G \circ C_m) \leq 2m - 1$ . Logo, no máximo um  $x_i = m$  o que implica, pelo Lema 4.8, em  $\gamma_a(G \circ C_m) = \sum_{i=1}^4 x_i \geq 2m - 1$ .

**Caso 2:**  $n = 5$ .

Suponha, primeiramente, que  $|p_{(G)}(A')| = 3$  que é a cardinalidade mínima de um conjunto dominante total em  $G$ . Assumimos, por simetria, que  $x_2, x_3, x_4 \neq 0$ . Pelo Lema 4.8, temos  $x_3 \geq m - 1$  e  $x_2 + x_4 \geq m - 1$ . Para que o segundo limite ocorra,  $x_3 = m$ , o que resulta em  $\sum_{i=1}^5 x_i \geq 2m - 1$ . Se  $|p_{(G)}(A')| = 4$ , temos 2 conjuntos dominantes totais em  $G$ , simetricamente distintos e podemos utilizar o Lema 4.8 para mostrar que, neste caso,  $\sum_{i=1}^5 x_i > 2m - 1$ . Se  $|p_{(G)}(A')| = 5$ ,  $x_1 + x_3 \geq m - 1$ ,  $x_2 + x_4 \geq m - 1$  e  $x_3 + x_5 \geq m - 1$ . Ainda, se  $G$  é um caminho,  $x_2, x_4 \geq \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  e se  $G$  é um ciclo  $x_2 + x_5 \geq m - 1$ , assim como  $x_1 + x_4 \geq m - 1$ . Já que  $\sum_{i=1}^4 x_i \geq 2m - 1$ , assim como  $\sum_{i=2}^5 x_i \geq 2m - 1$ , temos que  $x_1 = x_5$  o que implica em  $\sum_{i=1}^5 x_i = 5 \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  que é maior do que  $2m - 1$ . Portanto,  $|p_{(G)}(A')| = 3$  e  $\gamma_a(G \circ C_m) = \sum_{i=1}^5 x_i \geq 2m - 1$ .  $\square$



**Figura 4.2:** Exemplo de conjunto- $\gamma_a$  para  $C_4 \circ C_m$  que atende a Proposição 4.11.

**Proposição 4.12** Para  $m \geq 5$  e  $G = P_6$  ou  $G = C_6$ ,  $\gamma_a(G \circ C_m) = 2m + 4$ .

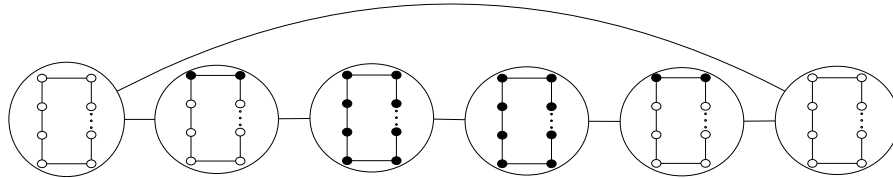
*Prova.* Considere  $A \subseteq V(G \circ C_m)$  contendo 2 vértices consecutivos de  $(C_m)_i$ ,  $i = 2, 5$  e  $m$  vértices de  $(C_m)_j$ ,  $j = 2, 3$ . Um exemplo de um conjunto- $\gamma_a$  para  $C_6 \circ C_m$  é obtido conforme a Figura 4.3. Todo vértice em  $(G \circ C_m) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$  e portanto  $A$  é um conjunto dominante de  $P_6 \circ C_m$ . Para cada  $v \in A$ ,  $N_A[v] \geq m + 2 = \lfloor \frac{N[v]}{2} \rfloor$ , e portanto  $A$  é uma ADG de  $G \circ C_m$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ C_m) \leq 2m + 4$ .

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $G \circ C_m$ . Seja  $x_i = |(C_m)_i \cap A'|$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Pela Proposição 4.5,  $p_G(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ . Suponhamos, inicialmente,  $|p_{(G)}(A')| = 4$  que é a cardinalidade mínima de um conjunto dominante total em  $G$ . Neste caso,  $x_i \neq 0$ ,  $i = 2, \dots, 5$  e temos

$$\begin{aligned} x_3 &\geq m - 1 \\ x_2 + x_4 &\geq m - 1 \\ x_3 + x_5 &\geq m - 1 \\ x_4 &\geq m - 1 \end{aligned}$$

Logo,  $x_2, x_5 \geq 0$ . Como  $p_{(G)}(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ , é necessário que  $x_2, x_5 \neq 0$ . Como  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$ ,  $x_2 \geq 2$  e  $x_5 \geq 2$ . Se  $x_2 = 2$ , então  $x_3 = m$

e se  $x_5 = 2$ , então  $x_4 = m$ . Se  $|p_{(G)}(A')| = 5$  ou  $|p_{(G)}(A')| = 6$ , podemos utilizar os limites do Lema 4.8 para mostrar que  $\sum_{i=1}^6 x_i > 2m + 4$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ C_m) = \sum_{i=1}^6 x_i \geq 2m + 4$ .  $\square$



**Figura 4.3:** Exemplo de conjunto- $\gamma_a$  para  $C_6 \circ C_m$  que atende a Proposição 4.12.

**Proposição 4.13** *Sejam  $m \geq 5$  e  $G = P_7$  ou  $G = C_7$ ,  $\gamma_a(G \circ C_m) = 3m + 1$*

*Prova.* Considere  $A \subseteq V(G \circ C_m)$  contendo 2 vértices consecutivos de  $(C_m)_i$ ,  $i = 2, 6$ ,  $m$  vértices de  $(C_m)_j$ ,  $j = 3, 5$  e  $m - 3$  vértices consecutivos de  $(C_m)_4$ . Um exemplo de conjunto- $\gamma_a$  para  $P_7 \circ C_m$  é representado na Figura 4.4. Note que  $|A| = 2 + m + m - 3 + m + 2 = 3m + 1$ .

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $G \circ H$ . Seja  $x_i = |(H)_i \cap A'|$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Pela Proposição 4.5,  $p_G(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ . Suponhamos, inicialmente,  $|p_{(G)}(A')| = 5$ . Neste caso,  $x_i \neq 0$ ,  $i = 2, \dots, 5$  e temos

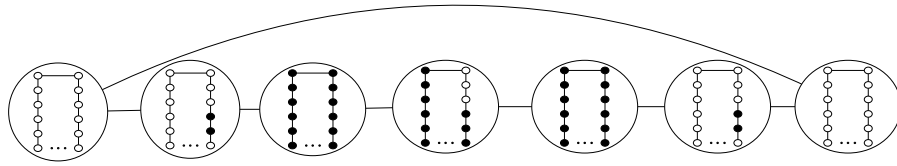
$$\begin{aligned} x_3 &\geq m - 1 \\ x_2 + x_4 &\geq m - 1 \\ x_3 + x_5 &\geq m - 1 \\ x_4 + x_6 &\geq m - 1 \\ x_5 &\geq m - 1 \end{aligned}$$

Logo,  $x_2, x_6 \geq 0$ . Como  $p_{(G)}(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ , é necessário que  $x_2, x_6 \neq 0$ . Como  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$ ,  $x_2 \geq 2$  e  $x_6 \geq 2$ . Se  $x_2 = 2$ , então  $x_3 = m$ , se  $x_6 = 2$ , então  $x_4 = m - 3$  e se  $x_4 = m - 3$ , então  $x_5 = m$ . Se  $|p_{(G)}(A')| = 6$  ou  $|p_{(G)}(A')| = 7$ , podemos utilizar os limites do Lema 4.8 para mostrar que  $\sum_{i=1}^6 x_i > 3m + 1$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ C_m) = \sum_{i=1}^6 x_i \geq 3m + 1$ .  $\square$

Para a Proposição abaixo denotamos  $X$  as cópias disjuntas de  $P_5 \circ C_m$  obtidas do grafo  $G \circ C_m$ .

**Teorema 4.14** *Sejam  $G = P_n$  ou  $G = C_n$  para  $n \geq 3$  e  $5 \leq m \leq 13$ . Então*

$$\gamma_a(G \circ C_m) \leq \begin{cases} (2m - 1) \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{Se } n \equiv 0, 4 \pmod{5} \\ (2m - 1) \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 5 & \text{Se } n \equiv 1 \pmod{5} \\ (2m - 1) \lceil \frac{n}{5} \rceil - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor & \text{Se } n \equiv 2, 3 \pmod{5} \end{cases}$$



**Figura 4.4:** Exemplo de conjunto- $\gamma_a$  para  $C_7 \circ C_m$  que atende a Proposição 4.13

*Prova.* Se  $n \geq 5$ , seja  $n' = 5(\lfloor \frac{n'}{5} \rfloor)$ ,  $I_1 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 2 \pmod{5}\}$ ,  $I_2 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 4 \pmod{5}\}$  e  $I_3 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 3 \pmod{5}\}$ .

Considere  $A \subseteq V(G \circ C_m)$  contendo  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de cada  $(C_m)_i$ ,  $i \in I_1$ ,  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  vértices de cada  $(C_m)_j$ ,  $j \in I_2$  e  $m$  vértices de  $(C_m)_k$ , para cada  $k \in I_3$ .

Se  $A \neq \emptyset$ , com esta construção,  $|A| = (2m-1)\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ . Seja  $v \in A$ . Note que  $d(v) = 2m+2$ . Para  $A$  ser uma ADG, é necessário que  $N_A[v] \geq \lceil \frac{2m+3}{2} \rceil = m+2$ . Além disso, todo vértice no subgrafo induzido por  $(G \circ C_m) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$ . Portanto,  $A$  é uma ADG em  $G \circ C_m$ . Logo  $\gamma_a(G \circ C_m) \leq (2m-1)\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $G \circ C_m$ . Seja  $x_i = |(C_m)_i \cap A'|$ ,  $i = 2, \dots, 4$ . E seja  $X$  cópias disjuntas de  $P_5 \circ C_m$  obtidas do grafo  $G \circ C_m$ . Pela Proposição 4.5,  $p_G(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ . Pela Proposição 4.11 temos  $\gamma_a(P_5 \circ C_m) = \sum_{i=2}^4 x_i = 2m-1$ . Neste caso, para toda cópia de  $X$  temos um  $\gamma_a(P_5 \circ C_m) = 2m-1$

Logo  $A'$  é a união das ADG das cópias  $X$ . Como  $p_{(G)}(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ , é necessário que toda cópia  $X$  tenha um conjunto- $\gamma_a(X) \neq \emptyset$ . Como  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a(G \circ C_m)$ ,  $\gamma_a(X) = 2m-1$ . Se  $X = P_6 \circ C_m$  ou  $X = P_7 \circ C_m$ , podemos facilmente mostrar que  $(2m+4)\lceil \frac{n}{6} \rceil + 2m-1 \geq (2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil$  e  $(3m+1)\lceil \frac{n}{7} \rceil + 2m-1 \geq (2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ C_m) = (2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil$ .

Para estender  $A$  a uma ADG em  $G \circ C_m$  quando  $n$  não é divisível por 5, temos que modificar o conjunto  $A$  da seguinte maneira:

**Caso 1:**  $n \equiv 1 \pmod{5}$ .

Acrescentar 2 vértices consecutivos de  $(C_m)_{n-4}$ , 2 consecutivos de  $(C_m)_{n-1}$ ,  $m$  vértices de  $(C_m)_{n-2}$  e  $m$  vértices de  $(C_m)_{n-3}$ .  $|A| = (2m-1)(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 1) + 2m+4 = (2m-1)\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 5$ .

**Caso 2:**  $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$

Acrescentar  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de  $(C_m)_{n-1}$  e  $m$  vértices de  $(C_m)_n$ .  $|A| = (2m-1)\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + m = (2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ .

**Caso 3:**  $n \equiv 4 \pmod{5}$

Acrescentar  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de  $(C_m)_{n-2}$ ,  $m$  vértices de  $(C_m)_{n-1}$  e  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de  $(C_m)_{n-3}$ .  $|A| = (2m-1)\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 2m-1 = (2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil$ .  $\square$

**Teorema 4.15** *Sejam  $G = P_n$  ou  $G = C_n$  para  $n \geq 3$  e  $m \geq 5$ . Então*

$$\gamma_a(G \circ C_m) = \begin{cases} (2m-1)\frac{n}{5} & \text{Se } n \equiv 0 \pmod{5} \text{ e } n \not\equiv 2 \pmod{6} \\ (2m-1)\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 2m+4 & \text{Se } n \equiv 1 \pmod{5} \text{ e } n \not\equiv 3 \pmod{6} \end{cases}$$

*Prova.* Sejam  $n' = 5(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor)$ , se  $n' \equiv 0 \pmod{5}$  e  $n' \not\equiv 2 \pmod{6}$  e em caso contrário.

$I_1 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 1 \pmod{5}\}$  e  $i \not\equiv 3 \pmod{6}$ ;

Considere  $A \subseteq V(G \circ C_m)$  contendo  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de cada  $(C_m)_i$ ,  $i \in I_1$ ,  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  vértices de cada  $(C_m)_j$ ,  $j \in I_2$  e  $m$  vértices de  $(C_m)_k$ , para cada  $k \in I_3$ .

Se  $A \neq \emptyset$ , com esta construção,  $|A| = (2m-1)\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ . Seja  $v \in A$ . Note que  $d(v) = 2m+2$ . Para  $A$  ser uma ADG, é necessário que  $N_A[v] \geq \lceil \frac{2m+3}{2} \rceil = m+2$ . Além disso, todo vértice no subgrafo induzido por  $(G \circ C_m) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$ . Portanto,  $A$  é uma ADG em  $G \circ C_m$ . Logo  $\gamma_a(G \circ C_m) \leq (2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil$

Logo  $A'$  é a união das ADG das cópias  $X$ . Como  $p_{(G)}(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ , é necessário que toda cópia  $X$  tenha um conjunto- $\gamma_a(X) \neq \emptyset$ . Como  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a(G \circ C_m)$ ,  $\gamma_a(X) = 2m-1$ . Se  $X = P_6 \circ C_m$  ou  $X = P_7 \circ C_m$ , podemos facilmente mostrar que  $(2m+4)\lceil \frac{n}{6} \rceil + 2m-1 \geq (2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil$  e  $(3m+1)\lceil \frac{n}{7} \rceil + 2m-1 \geq (2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ C_m) = (2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil$ .

**Caso 1:**  $n \equiv 1 \pmod{5}$  e  $n \not\equiv 3 \pmod{6}$ .

Acrescentar 2 vértices consecutivos de  $(C_m)_{n-4}$ , 2 consecutivos de  $(C_m)_{n-1}$ ,  $m$  vértices de  $(C_m)_{n-2}$  e  $m$  vértices de  $(C_m)_{n-3}$ .  $|A| = (2m-1)(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor) + 2m+4$ .

$\square$

Observamos que para  $n \geq 8$ , quando  $m \geq 14$ , se dividirmos  $n$  em subcaminhos de tamanho 6, podemos ter uma ADG de menor cardinalidade se comparada a uma ADG em que o caminho, ou ciclo, são divididos por 5. Isto ocorre porque  $\gamma_a(G \circ C_m) = 2m-1$  para  $n = 5$  e  $\gamma_a(G \circ C_m) = 2m+4$  para  $n = 6$ . Se dividirmos estes valores pela quantidade de vértices dominados, ou seja, 5 e 6, respectivamente, e igualarmos os valores obtidos, teremos como resultado  $m = 13$ . Ou seja, para  $m = 13$  é indiferente dividir o caminho, ou ciclo. Em subcaminhos de tamanho 5 ou 6, mas para valores maiores do que 13, obtemos uma ADG de menor cardinalidade se a divisão for feita por subcaminhos de tamanho 6, exceto nas condições apresentadas no Teorema 4.15. Estas fórmulas fechadas são estabelecidas no Teorema 4.16.

**Teorema 4.16** *Sejam  $G = P_n$  ou  $G = C_n$  para  $n \geq 8$  e  $m \geq 14$ . Então*

$$\gamma_a(G \circ C_m) \leq \begin{cases} (2m+4)\frac{n}{6} & \text{Se } n \equiv 0 \pmod{6} \\ (2m+4)\lfloor \frac{n}{7} \rfloor + 3m+1 & \text{Se } n \equiv 1 \pmod{6} \text{ e } n \not\equiv 0 \pmod{5} \\ (2m+4)\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + m + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor & \text{Se } n \equiv 2 \pmod{6} \\ (2m+4)\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + m + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor & \text{Se } n \equiv 3 \pmod{6} \text{ e } n \not\equiv 0 \pmod{5} \\ (2m+4)\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2m-1 & \text{Se } n \equiv 4 \pmod{6} \text{ e } n \not\equiv 1 \pmod{5} \\ (2m+4)\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2m-1 & \text{Se } n \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}$$

*Prova.* Seja  $n' = 6\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ ,

$I_1 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 1 \pmod{6}\}$  e  $i \not\equiv 0 \pmod{5}$ ;

$I_2 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 2 \pmod{6}\}$ ;

$I_3 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 3 \pmod{6}\}$  e  $i \not\equiv 0 \pmod{5}$ ;

$I_4 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 4 \pmod{6}\}$  e  $i \not\equiv 1 \pmod{5}$  e

$I_5 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 5 \pmod{6}\}$ .

Considere  $A \subseteq V(G \circ C_m)$  contendo 2 vértices consecutivos de cada  $(C_m)_i$ ,  $i \in I_1$  e  $m$  vértices de cada  $(C_m)_j$ ,  $j \in I_2$ .

Se  $A \neq \emptyset$ , com esta construção,  $|A| = (2m+4)\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ . Seja  $v \in A$ . Note que  $d(v) = 2m+2$ . Para  $A$  ser uma ADG, é necessário que  $N_A[v] \geq \lceil \frac{2m+3}{2} \rceil = m+2$ . Além disso, todo vértice no subgrafo induzido por  $(G \circ C_m) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$ . Logo,  $A$  é uma ADG em  $G \circ C_m$ .

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $G \circ C_m$ . Seja  $x_i = |(C_m)_i \cap A'|$ ,  $i = 2, \dots, 5$ . E seja  $X$  cópias disjuntas de  $P_6 \circ C_m$  obtidas do grafo  $G \circ C_m$ . Pela Proposição 4.5,  $p_G(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ . Pela Proposição 4.12 temos  $\gamma_a(P_6 \circ C_m) = \sum_{i=2}^5 x_i = 2m+4$ . Neste caso, para toda cópia de  $X$  temos um  $\gamma_a(P_6 \circ C_m) = \sum_{i=2}^5 x_i = 2m+4$

Logo  $A'$  é a união das ADG das cópias  $X$ . Como  $p_{(G)}(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ , é necessário que toda cópia  $X$  tenha um conjunto- $\gamma_a(X) \neq \emptyset$ . Como  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a(G \circ C_m)$ ,  $\gamma_a(X) = 2m+4$ . Se  $X = P_5 \circ C_m$  ou  $X = P_7 \circ C_m$ , podemos facilmente mostrar que  $(2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil + \lceil \frac{m}{2} \rceil + m \geq (2m+4)\lceil \frac{n}{6} \rceil$  ou  $(3m+1)\lceil \frac{n}{7} \rceil + 2m-1 \geq (2m+4)\lceil \frac{n}{6} \rceil$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ C_m) = (2m+4)\lceil \frac{n}{6} \rceil$ .

Para estender  $A$  a uma ADG em  $G \circ C_m$  quando  $n'$  não é divisível por 6, temos que modificar o conjunto  $A$  da seguinte maneira:

**Caso 1:**  $n \equiv 1 \pmod{6}$  e  $i \not\equiv 0 \pmod{5}$ .

Acrescentar 2 vértices consecutivos de  $(C_m)_{n-5}$ , 2 consecutivos de  $(C_m)_{n-1}$ ,  $m$  vértices de  $(C_m)_{n-2}$ ,  $m-3$  vértices de  $(C_m)_{n-3}$  e  $m$  vértices de  $(C_m)_{n-4}$ .  $|A| = (2m+4)(\lfloor \frac{n}{6} \rfloor - 1) + 3m+1 = (2m+4)(\lfloor \frac{n}{7} \rfloor) + 3m+1$ .

**Caso 2:**  $n \equiv 2 \pmod{6}$

Acrescentar  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de  $(C_m)_{n-1}$  e  $m$  vértices de  $(C_m)_n$ .  
 $|A| = (2m+4)\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + m = (2m+4)\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + m + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ .

**Caso 3:**  $n \equiv 3 \pmod{6}$  e  $n \not\equiv 0 \pmod{5}$

Acrescentar  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de  $(C_m)_{n-1}$  e  $m$  vértices de  $(C_m)_n$ .  
 $|A| = (2m+4)\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + m = (2m+4)\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + m + \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ .

**Caso 4:**  $n \equiv 4 \pmod{6}$  e  $n \not\equiv 1 \pmod{5}$

Acrescentar  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de  $(C_m)_{n-2}$ ,  $m$  vértices de  $(C_m)_{n-1}$  e  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de  $(C_m)_{n-3}$ .  $|A| = (2m+4)\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2m - 1$ .

□

Como já comentado anteriormente, o produto lexicográfico não possui a propriedade comutativa, portanto depois de apresentarmos as proposições para ADG de  $P_n \circ C_m$  e  $C_n \circ C_m$ , as próximas proposições estabelecem o número da aliança defensiva global para os grafos  $P_n \circ P_m$  e  $C_n \circ P_m$ , bem como apresentamos uma ADG para  $P_n \circ S_m$  e  $C_n \circ S_m$ .

Nos resultados seguintes, estabelecemos valores para  $\gamma_a(G \circ H)$ , quando  $G$  é um caminho ou um ciclo e  $H \in \{P_m, S_m\}$  quando  $n \geq 3$  e  $m \geq 5$ . Em resumo, na Tabela 4.2 observamos um padrão das Proposições em 4.17 a 4.21 que:

**Tabela 4.2:** *Resumo das Proposições 4.17 a 4.21.*

$\gamma_a(G \circ H) =$	$m + \lceil \frac{m}{2} \rceil$	se $G \in \{P_3, C_3\}$ e se $H \in \{P_m, S_m\}$
$\gamma_a(G \circ H) =$	$2m - 1$	se $G \in \{P_4, C_4, P_5, C_5\}$ e se $H \in \{P_m, S_m\}$
$\gamma_a(G \circ H) =$	$2m + 2$	se $G \in \{P_6, C_6\}$ e se $H \in \{P_m, S_m\}$
$\gamma_a(G \circ H) =$	$3m$	se $G \in \{P_7, C_7\}$ e se $H \in \{P_m, S_m\}$

**Proposição 4.17** Para  $m \geq 5$  e  $G = P_3$  ou  $C_3$ ,  $\gamma_a(G \circ P_m) = m + \lceil \frac{m}{2} \rceil$ .

*Prova.* Considere  $A \subseteq V(C_3 \circ P_m)$  contendo  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  vértices consecutivos de  $(P_m)_1$  e  $(P_m)_2$  e  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  vértices de  $(P_m)_1$ . Todo vértice em  $(C_3 \circ P_m) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$  e portanto  $A$  é um conjunto dominante de  $C_3 \circ P_m$ . Para cada  $v \in A$ ,  $N_A[v] \geq \frac{N[v]}{2}$  e portanto  $A$  é uma ADG de  $C_3 \circ P_m$ . Logo,  $\gamma_a(C_3 \circ P_m) \leq m + \lceil \frac{m}{2} \rceil$ .

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $C_3 \circ P_m$ . Seja  $x_i = |(P_m)_i \cap A'|$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Pela Proposição 4.5,  $p_{(C_3)}(A')$  é um conjunto dominante total em  $C_3$ . Temos dois conjuntos dominantes totais em  $C_3$ , simetricamente distintos. Nos dois casos, pelo Lema 4.8, temos

$$\begin{aligned} x_1 &\geq m - 1 \\ x_1 + x_2 &\geq m - 1 \end{aligned}$$



Se  $x_2 = m$ , temos  $|A'| \geq 2m$  que contraria que  $\gamma_a(C_3 \circ P_m) \leq m + \lceil \frac{m}{2} \rceil$ . Logo,  $x_2 < \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  o que implica, pelo Lema 4.8, em  $x_1 + x_2 \geq m - 1$ . Temos então  $\gamma_a(C_3 \circ P_m) = x_1 + x_2 \geq m + \lceil \frac{m}{2} \rceil$ .  $\square$

**Proposição 4.18** Para  $m \geq 5$  e  $G = P_3$  ou  $C_3$ . Então  $\gamma_a(G \circ S_m) = m + \lceil \frac{m}{2} \rceil$ .

*Prova.* Considere  $A \subseteq V(G \circ S_m)$  contendo  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  vértices folhas de  $(S_m)_3$ ,  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  vértices de  $(S_m)_1$  e  $(S_m)_2$ , sendo um destes vértices o vértice raiz. Todo vértice em  $(G \circ S_m) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$  e portanto  $A$  é um conjunto dominante de  $G \circ S_m$ . Para cada  $v \in A$ ,  $N_A[v] \geq \frac{N[v]}{2}$  e portanto  $A$  é uma ADG de  $G \circ S_m$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ S_m) \leq m + \lceil \frac{m}{2} \rceil$ .

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $G \circ S_m$ . Seja  $x_i = |(S_m)_i \cap A'|$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Pela Proposição 4.5,  $p_{(G)}(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ . Temos dois conjuntos dominantes totais em  $G$ , simetricamente distintos. Nos dois casos, pelo Lema 4.8, temos

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq m - 1 \\ x_2 + x_3 &\geq m - 1 \end{aligned}$$

Se  $x_1 = m$ , temos  $|A'| \geq 2m$  que contraria que  $\gamma_a(G \circ S_m) \leq m + \lceil \frac{m}{2} \rceil$ . Logo,  $x_1 = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ , então  $x_2 \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil$  o que implica, pelo Lema 4.8, em  $x_1 + x_2 \geq m + 1$ . Se  $x_2 = \lceil \frac{m}{2} \rceil$ , então  $x_3 = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  o que implica, pelo Lema 4.8, em  $x_2 + x_3 \geq m$ . Temos então  $\gamma_a(G \circ S_m) = x_1 + x_2 + x_3 \geq m + \lceil \frac{m}{2} \rceil$ .  $\square$

**Proposição 4.19** Para  $m \geq 5$  e  $G \in \{P_4, C_4, P_5, C_5\}$  e  $H = P_m$  ou  $S_m$ ,  $\gamma_a(G \circ H) = 2m - 1$ .

*Prova.* Considere  $A \subseteq V(G \circ H)$  contendo  $m - 2$  vértices de  $(H)_2$ ,  $m$  vértices de  $(H)_3$  e 1 vértice folha de  $(H)_4$ . Note que  $|A| = 2m - 1$ . Todo vértice em  $(G \circ H) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$  e portanto  $A$  é um conjunto dominante de  $C_4 \circ P_m$ . Para cada  $v \in A$ ,  $N_A[v] \geq \frac{N[v]}{2}$  e portanto  $A$  é uma ADG de  $G \circ H$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ H) \leq 2m - 1$ .

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $G \circ H$ . Seja  $x_i = |(H)_i \cap A'|$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  onde  $n = |V(G)|$ . Pela Proposição 4.5,  $p_{(G)}(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ . Temos um conjunto dominante total em  $G$ . Vamos utilizar os limites do Lema 4.8, para demonstrar os dois casos:

**Caso 1:**  $n=4$ .

Suponha, primeiramente, que  $|p_{(G)}(A')| = 2$  é a cardinalidade mínima de um conjunto dominante total em  $G$ . Assumimos, por simetria, que  $x_2, x_3 \neq 0$ . Pelo Lema 4.8, temos  $x_2, x_3 \geq m - 1$ , o que resulta em  $x_2 + x_3 \geq 2m - 2$ . Para que algum limite ocorra, é preciso que  $x_2 = m$  ou  $x_3 = m$ , o que resulta em  $x_2 + x_3 = 2m - 1$ . Se  $|p_{(G)}(A')| = 3$ , assumimos simetricamente que  $x_i \neq 0$ ,  $i = 2, 3, 4$ . Assim  $x_2 \geq m - 2$  e  $x_2 + x_4 \geq m - 1$  e

para que esse limite ocorra, é preciso que  $x_3 = m$ , o que resulta em  $x_2 + x_3 + x_4 \geq 2m - 1$ . Se  $x_i \neq 0$ , para  $i = 1, \dots, 4$  temos  $x_1 + x_3 \geq m - 1$  e  $x_2 + x_4 \geq m$ .

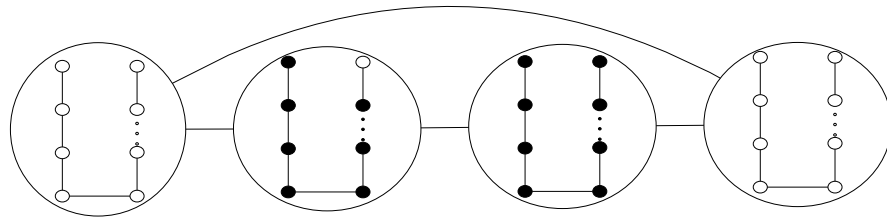
Para que os limites ocorram,  $x = m$ . Se temos todo  $x_i = m$ , temos  $|A'| \geq 4m$  o que contraria que  $\gamma_a \leq 2m - 1$ . Logo, no máximo um  $x_i = m$  o que implica, pelo Lema 4.8, em  $\gamma_a \leq 2m - 1$

**Caso 2:**  $n=5$ .

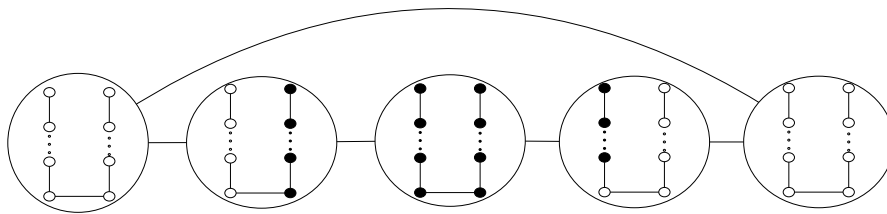
Suponha, primeiramente, que  $|p_{(G)}(A')| = 3$  é a cardinalidade mínima de um conjunto dominante total em  $G$ . Assumimos, por simetria que,  $x_2, x_3, x_4 \neq 0$ . Pelo Lema 4.8, temos  $x_3 \geq m$  e  $x_2 + x_4 \geq m - 1$ . Para que o segundo limite ocorra, é preciso que  $x_2 = m - 2$ , o que resulta em  $\sum_{i=1}^5 \geq 2m - 1$ . Se  $|p_{(G)}(A')| = 4$ , temos dois conjuntos dominantes totais em  $G$ , simetricamente distintos e podemos utilizar o Lema 4.8 para mostrar que, neste caso,  $\sum_{i=1}^5 \geq 2m - 1$ . Se  $|p_{(G)}(A')| = 5$ ,  $x_1 + x_3 \geq m - 1$ ,  $x_2 + x_4 \geq m - 1$ ,  $x_3 + x_5 \geq m - 1$ . Visto que  $\sum_{i=1}^4 \geq 2m - 1$ ,  $\sum_{i=1}^5 \geq 5 \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  e  $\sum_{i=2}^5 \geq 2m - 1$ . Portanto  $|p_{(G)}(A')| = 3$  e  $\gamma_a \leq 2m - 1$ .

□

Podemos obter um conjunto- $\gamma_a$  para  $\gamma_a(C_4 \circ P_m)$  conforme a Figura 4.5, e um conjunto- $\gamma_a$  para  $\gamma_a(C_5 \circ P_m)$  é obtido conforme a Figura 4.6



**Figura 4.5:** Exemplo de conjunto- $\gamma_a$  para o  $C_4 \circ P_m$  que atende a Proposição 4.19.



**Figura 4.6:** Exemplo de conjunto- $\gamma_a$  para o  $C_5 \circ P_m$  que atende a Proposição 4.19.

**Proposição 4.20** Para  $m \geq 5$ , se  $G = C_6$  ou  $P_6$ , e  $H = P_m$  ou  $S_m$ ,  $\gamma_a(G \circ H) = 2m + 2$ .

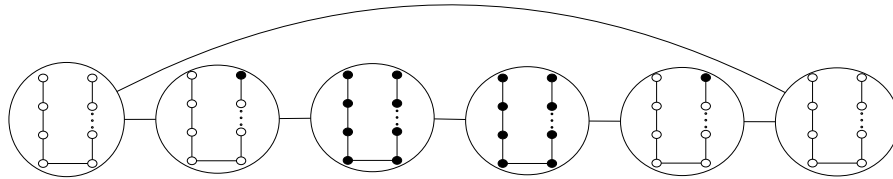
*Prova.* Considere  $A \subseteq V(G \circ C_m)$  contendo 1 vértice folha de  $(H)_i$ ,  $i = 2, 5$  e  $m$  vértices de  $(C_m)_j$ ,  $j = 2, 3$ . Um exemplo de um conjunto- $\gamma_a$  para  $C_6 \circ P_m$  é obtido conforme a Figura

4.7 Todo vértice em  $(G \circ H) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$  e portanto  $A$  é um conjunto dominante de  $G \circ H$ . Para cada  $v \in A$ ,  $N_A[v] \geq \left\lceil \frac{N[v]}{2} \right\rceil$ , e portanto  $A$  é uma ADG de  $G \circ H$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ H) \leq 2m + 2$ .

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $G \circ H$ . Seja  $x_i = |(H)_i \cap A'|$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Pela Proposição 4.5,  $p_G(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ . Suponhamos, inicialmente,  $|p_G(A')| = 4$  que é a cardinalidade mínima de um conjunto dominante total em  $G$ . Neste caso,  $x_i \neq 0$ ,  $i = 2, \dots, 5$  e temos

$$\begin{aligned} x_3 &\geq m - 1 \\ x_2 + x_4 &\geq m - 1 \\ x_3 + x_5 &\geq m - 1 \\ x_4 &\geq m - 1 \end{aligned} .$$

Logo,  $x_2, x_5 \geq 0$ . Como  $p_G(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ , é necessário que  $x_2, x_5 \neq 0$ . Como  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$ ,  $x_2 \geq 1$  e  $x_5 \geq 1$ . Se  $x_2 = 1$ , então  $x_3 = m$  e se  $x_5 = 1$ , então  $x_4 = m$ . Se  $|p_G(A')| = 5$  ou  $|p_G(A')| = 6$ , podemos utilizar os limites do Lema 4.8 para mostrar que  $\sum_{i=1}^6 x_i > 2m + 2$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ C_m) = \sum_{i=1}^6 x_i \geq 2m + 2$ .  $\square$



**Figura 4.7:** Exemplo de conjunto- $\gamma_a$  para  $C_6 \circ P_m$  que atende a Proposição 4.20.

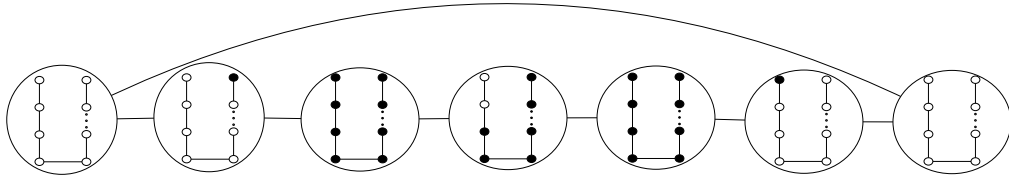
**Proposição 4.21** Para  $m \geq 5$ , se  $G = C_7$  ou  $P_7$ , e  $H = P_m$  ou  $S_m$ ,  $\gamma_a(G \circ H) = 3m$ .

*Prova.* Considere  $A \subseteq V(G \circ C_m)$  contendo 1 vértice folha de  $(H)_i$ ,  $i = 2, 5$ ,  $m$  vértices de  $(H)_j$ ,  $j = 3, 5$  e  $m - 2$  vértices de  $(H)_4$ . Um conjunto- $\gamma_a$  para  $\gamma_a(C_7 \circ P_m)$  nós podemos obter conforme a Figura 4.8. Todo vértice em  $(G \circ H) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$  e portanto  $A$  é um conjunto dominante de  $G \circ H$ . Para cada  $v \in A$ ,  $N_A[v] \geq \left\lceil \frac{N[v]}{2} \right\rceil$ , e portanto  $A$  é uma ADG de  $G \circ H$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ H) \leq 3m$ .

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $G \circ H$ . Seja  $x_i = |(H)_i \cap A'|$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . Pela Proposição 4.5,  $p_G(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ . Suponhamos, inicialmente,  $|p_G(A')| = 5$ . Neste caso,  $x_i \neq 0$ ,  $i = 2, \dots, 5$  e temos

$$\begin{aligned}
x_3 &\geq m-1 \\
x_2 + x_4 &\geq m-1 \\
x_3 + x_5 &\geq m-1 \\
x_4 + x_6 &\geq m-1 \\
x_5 &\geq m-1
\end{aligned}$$

Logo,  $x_2, x_6 \geq 0$ . Como  $p_{(G)}(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ , é necessário que  $x_2, x_6 \neq 0$ . Como  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$ ,  $x_2 \geq 1$  e  $x_6 \geq 1$ . Se  $x_2 = 1$ , então  $x_3 = m$ , se  $x_6 = 1$ , então  $x_4 = m-2$  e se  $x_4 = m-2$ , então  $x_5 = m$ . Se  $|p_{(G)}(A')| = 6$  ou  $|p_{(G)}(A')| = 7$ , podemos utilizar os limites do Lema 4.8 para mostrar que  $\sum_{i=1}^6 x_i > 3m$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ C_m) = \sum_{i=1}^6 x_i \geq 3m$ .  $\square$



**Figura 4.8:** Exemplo de conjunto- $\gamma_a$  para  $C_7 \circ P_m$  que atende a Proposição 4.21.

**Teorema 4.22** *Sejam  $G = P_n$  ou  $G = C_n$  para  $n$  e  $m \geq 8$ . Então*

$$\gamma_a(G \circ P_m) \leq \begin{cases} (2m-1)\frac{n}{5} & \text{Se } n \equiv 0, 3, 4 \pmod{5} \text{ e } n \not\equiv 0, 5 \pmod{6} \\ (2m-1)\lceil \frac{n}{6} \rceil + 2m + 2 & \text{Se } n \equiv 1 \pmod{5} \\ (2m+2)\frac{n}{6} & \text{Se } n \equiv 0 \pmod{6} \\ (2m+2)\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 2m - 1 & \text{Se } n \equiv 5 \pmod{6} \end{cases}$$

*Prova.* Seja  $n' = 5(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor)$ , se  $n \equiv 0, 3, 4 \pmod{5}$  e  $n' \not\equiv 0, 5 \pmod{6}$  e  $n'' = 6\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ , em caso contrário.

$$I_1 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 1, 3 \pmod{5}\} \text{ e}$$

$$I_2 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 2 \pmod{5}\} \text{ e}$$

$$I_3 = \{i \mid 1 \leq i \leq n''; i \equiv 1, 4 \pmod{6}\} \text{ e}$$

$$I_4 = \{i \mid 1 \leq i \leq n''; i \equiv 2, 3 \pmod{6}\}.$$

**Caso 1:**  $n' \equiv 0, 3, 4 \pmod{5}$  e  $n \not\equiv 0, 5 \pmod{6}$

Considere  $A \subseteq V(G \circ P_m)$  contendo  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  vértices alternados de cada  $(P_m)_i$ ,  $i \in I_1$  e  $m$  vértices de cada  $(P_m)_i$ ,  $i \in I_2$

Se  $A \neq \emptyset$ , com esta construção,  $|A| = (2m-1)\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ . Seja  $v \in A$ . Note que  $d(v) = 2m+2$  para os vértices não folha e  $d(v) = 2m+1$  para os vértices folha. Para

A ser uma ADG, é necessário que  $N_A[v] \geq \lceil \frac{2m+3}{2} \rceil = m+2$ . Além disso, todo vértice no subgrafo induzido por  $(G \circ P_m) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$ . Logo,  $A$  é uma ADG em  $G \circ P_m$ .

Seja  $A'$  a união das ADG das cópias  $X$ ,  $X = P_5 \circ P_m$  ou  $X = C_5 \circ P_m$  contidas em  $G \circ C_m$ . Como  $p_{(G)}(A')$  é um conjunto dominante total em  $G$ , é necessário que toda cópia  $X$  tenha um conjunto- $\gamma_a(X) \neq \emptyset$ . Como  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a(G \circ P_m)$ , o  $|\gamma_a(X)| = 2m-1$ . Se  $X = G' \circ P_m$  ou  $X = G'' \circ P_m$ , e  $|G'| = 6$  ou  $|G''| = 6$ , podemos facilmente mostrar que  $(2m+2)\lceil \frac{n}{6} \rceil + 2m-1 \geq (2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil$  e  $(3m)\lceil \frac{n}{7} \rceil + 2m-1 \geq (2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ P_m) = (2m-1)\lceil \frac{n}{5} \rceil$ .

Para estender  $A$  a uma ADG em  $G \circ P_m$  quando  $n'$  não é divisível por 5, temos que modificar o conjunto  $A$  da seguinte maneira:

**Caso 2:**  $n' \equiv 1 \pmod{5}$ . Acrescentar 1 vértice folha de  $(P_m)_{n-4}$  e  $(P_m)_{n-1}$ ,  $m$  vértices de  $(P_m)_{n-3}$  e  $(P_m)_{n-2}$ .  $|A| = (2m+1)(\lceil \frac{n}{6} \rceil) + 2m+2$ .

**Caso 3:**  $n'' \equiv 0 \pmod{6}$ . Considere  $A \subseteq V(G \circ P_m)$  contendo um vértice folha de  $(P_m)_i$ ,  $i \in I_3$ ,  $m$  vértices de  $(P_m)_i$ ,  $i \in I_4$ .  $|A| = (2m+2)(\lceil \frac{n}{6} \rceil)$ .

**Caso 4:**  $n'' \equiv 5 \pmod{6}$ . Considere  $A \subseteq V(G \circ P_m)$  contendo um vértice folha de  $(P_m)_i$ ,  $i \in I_3$ ,  $m$  vértices de  $(P_m)_i$ ,  $i \in I_4$ .  $|A| = (2m+2)(\lceil \frac{n}{6} \rceil)$ . Acrescentar  $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$  vértices de  $(P_m)_{n-4}$  e  $(P_m)_{n-2}$ ,  $m$  vértices de  $(P_m)_{n-3}$ .  $|A| = (2m+2)(\lceil \frac{n}{6} \rceil) + 2m-1$

□

Após apresentarmos os resultados para ADG para produto lexicográfico em grafos caminho, ciclo e estrela, também obtemos a Proposição 4.23 para a ADG do produto lexicográfico entre grafos completos  $K_n \circ K_m$ , bem como a Proposição 4.25 para a ADG do  $C_n \circ K_m$ .

**Proposição 4.23** [27] Para um grafo completo  $K_n$ ,  $\gamma(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

**Teorema 4.24** Sejam  $K_n$  e  $K_m$  dois grafos completos então

$$\gamma_a(K_n \circ K_m) = \lceil \frac{nm}{2} \rceil$$

*Prova.* Todo produto lexicográfico entre dois grafos completos  $K_n$  e  $K_m$  gera outro grafo completo com  $nm$  vértices. Logo o novo grafo  $K_n \circ K_m$  segue a Proposição 4.23 com um grafo de  $nm$  vértices. Portanto

$$\gamma_a(K_n \circ K_m) = \lceil \frac{nm}{2} \rceil. \text{ o que completa a prova.}$$

□

É interessante observar que o Teorema 4.24 consequentemente é válido para  $\gamma_a(P_2 \circ K_m)$  e  $\gamma_a(C_3 \circ K_m)$ .

**Proposição 4.25** *Seja  $G = C_n$  ou  $P_n$  para  $n \geq 3$  e  $m \geq 5$  números inteiros. Então*

$$\gamma_a(G \circ K_m) = \lceil \frac{m \times 3}{4} \rceil \times \gamma(G) - \lceil \frac{n}{4} \rceil \times (\lceil \frac{m}{4} \rceil - \lfloor \frac{m}{4} \rfloor)$$

*Prova.*

$$\text{Seja } n' = 4(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor),$$

$$I_1 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 1, 0 \pmod{4}\} \text{ e}$$

$$I_2 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 3 \pmod{4}\} \text{ e}$$

Para toda ADG  $A$  de  $G \circ K_m$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , seja  $x_i = |(K_m)_i \cap A|$ . Se  $G = C_n$ ,  $x_{-1} = x_m$  e  $x_{m+1} = x_1$  e se  $G = P_n$ ,  $x_{-1} = x_m$  e  $x_{m+1} = 0$ , então  $x_i = m$ , e para  $N_A(K_m)_i \neq 0$ ,  $x_{i+1}$  e/ou  $x_{i-1} = \lceil \frac{m}{2} \rceil$ . Alguns exemplos de conjuntos- $\gamma_a$  para  $G \circ K_m$  são obtidos conforme a Figura 4.9 Todo vértice em  $(G \circ K_m) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$  e portanto  $A$  é um conjunto dominante de  $G \circ K_m$ . Para cada  $v \in A$ ,  $N_A[v] \geq \lceil \frac{N[v]}{2} \rceil$ , e portanto  $A$  é uma ADG de  $G \circ K_m$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ K_m) \leq \lceil \frac{m \times 3}{4} \rceil \times \gamma(G) - \lceil \frac{n}{4} \rceil \times (\lceil \frac{m}{4} \rceil - \lfloor \frac{m}{4} \rfloor)$ .

Primeiramente mostramos que  $p_{(G)}A = \gamma_t(G \circ H) = \gamma_t(G)$ . Pela Proposição 4.8,  $p_{(G)}A$  é um conjunto dominante total em  $G$ . Logo  $p_{(G)}A \leq \gamma_t(G \circ H) \leq \gamma_t(G)$ .

Por outro lado, suponha que  $A'$  é um conjunto- $\gamma_a$  em  $G \circ K_m$ . Seja  $x_i = |(K_m)_i \cap A'|$ ,  $i = 1, \dots, n$ , onde  $n = |V(G)|$  e  $\Delta(G) \leq 3$ , então temos um conjunto dominante total  $A'$  e o vértice  $u \in A'$ ,  $|N_{A'}[u]| - x_i \geq m$ , deste modo  $|N_{A'}(u) \cap (K_m)_i| \geq 1$ . Portanto  $p_{(G)}(A') \geq \gamma_t(G \circ K_m) \geq \gamma_t(G)$ .

Seja  $p_{(G)}(A) = \gamma_t(G)$  e  $A$  uma ADG de  $G$ ,  $N_A[v] \geq \lceil \frac{N[v]}{2} \rceil$ , considerando  $x_i = m$ . Podemos então afirmar que,  $x_i + x_{i-1} + x_{i+1} \geq \lceil \frac{d_G(i) \cdot m + d_{K_m}(v) + 1}{2} \rceil$ ,  $x_i + x_{i-1} + x_{i+1} \geq \lceil \frac{2 \cdot m + m - 1 + 1}{2} \rceil$ ,  $x_i + x_{i-1} + x_{i+1} \geq \lceil \frac{3 \cdot m}{2} \rceil$ . Assim, temos dois casos:

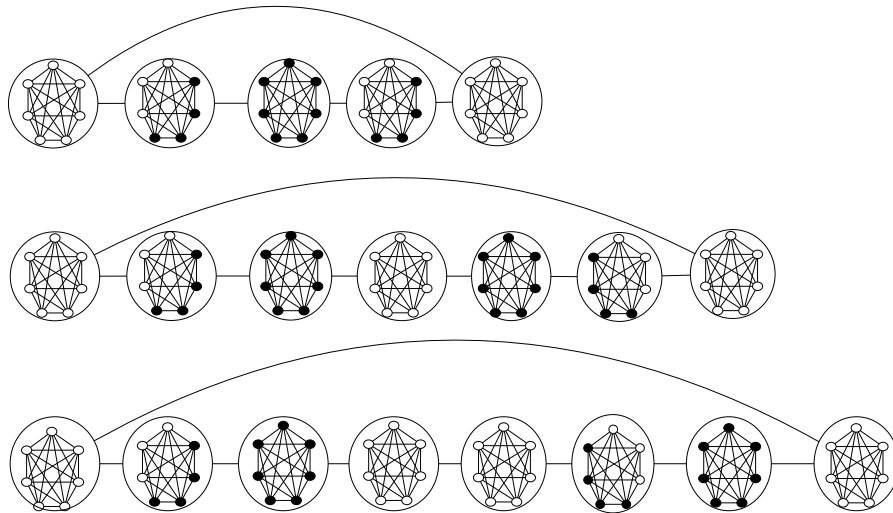
1)  $N_A(K_m)_i = 2$ . Então  $x_{i-1} + x_{i+1} = m + 1$  quando  $m$  ímpar e  $x_{i-1} + x_{i+1} = m$  quando  $m$  par, ou seja  $x_{i-1} = x_{i+1} = \lceil \frac{m}{2} \rceil$ .

2)  $N_A(K_m)_i = 1$ . Então  $x_{i+1} = \lceil \frac{m}{2} \rceil$  e  $x_{i-1} = 0$ .

Como  $p_{(G)}(A)$  é um conjunto dominante total em  $G$ , é que  $x_{i-1} \neq 0$  para o caso 1 e  $x_{i+1} \neq 0$  para o caso 1 e 2. Como  $A$  é um conjunto- $\gamma_a$ ,  $x_{i-1} \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil$  para o caso 1 e  $x_{i+1} \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil$  para os casos 1 e 2. Se  $x_{i-1} = \lceil \frac{m}{2} \rceil$  para o caso 1 então  $x_i = m$  e se  $x_i = m$ , então  $x_{i+1} = \lceil \frac{m}{2} \rceil$  para os casos 1 e 2. Se  $p_{(G)}(A) = \gamma_t(G) = \gamma_a(G)$  então sabemos que  $\sum_{i=1}^n x_i \geq \lceil \frac{m \times 3}{4} \rceil \times \gamma(G) - \lceil \frac{n}{4} \rceil \times (\lceil \frac{m}{4} \rceil - \lfloor \frac{m}{4} \rfloor)$ . Logo,  $\gamma_a(G \circ K_m) = \lceil \frac{m \times 3}{4} \rceil \times \gamma(G) - \lceil \frac{n}{4} \rceil \times (\lceil \frac{m}{4} \rceil - \lfloor \frac{m}{4} \rfloor)$

□

Após a apresentação os resultados para aliança defensiva global para produto lexicográfico entre grafos caminho, ciclos e grafos estrela e grafos completos, bem como apresentado alguns limites para prisma complementar. A próxima Seção 4.3 apresenta os



**Figura 4.9:** Exemplos de produto lexicográfico que atendem a Proposição 4.25, sendo grafos resultantes de  $C_n \circ K_7$ .

números de aliança ofensiva global com fórmulas fechadas, limites superiores e algumas conjecturas em produto lexicográfico de caminhos, ciclos e grafos estrela.

### 4.3 Aliança Ofensiva Global e Produto Lexicográfico de Caminhos, Ciclos e Grafos Estrela

O problema de encontrar a Aliança Ofensiva Global (AOG) é NP-difícil [13]. Contudo, como observamos no capítulo anterior para alguns grafos é possível determinar estes números. Seguem alguns estudos, realizados neste trabalho, para AOG em produto Lexicográfico de Caminho, Ciclos e Grafos Estrela.

Para um conjunto não vazio  $A \subseteq V$  e um vértice  $v \in V$ ,  $N_A(v)$  denotamos o conjunto de vizinhos  $v$  que estão em  $A$ , isto é,  $N_A(v) = A \cap N(v)$ . O grau de  $v \in A$  será denotado por  $d_A(v) = |N_A(v)|$ . O complemento do conjunto  $A$  em  $V$  denotado  $\bar{A}$ . A vizinhança de  $A$  é denotada por  $\partial A$ , é definida como conjunto de vértices de  $\bar{A}$  que são adjacentes a pelo menos um vértice em  $A$ . Um conjunto  $A \subseteq V$  é um conjunto dominante em  $G$  se para todo vértice  $v \in \bar{A}$ ,  $d_A(v) > 0$  (todo vértice em  $\bar{A}$  é adjacente a pelo menos um vértice em  $A$ ). O número do conjunto dominante de  $G$  é denotado por  $\gamma(G)$ . Um conjunto dominante eficiente é um conjunto dominante  $A = u_1, u_2, \dots, u_{\gamma(G)}$  de modo que  $N[u_i] \cap N[u_j] = \emptyset$ , para todo  $i, j \in \{1, \dots, \gamma(G)\}$ ,  $i \neq j$ . Em [53] cita grafos caminho  $P_n$ , grafos ciclos  $C_{3k}$  e grafos cúbicos  $Q_3$  como exemplos de conjunto dominante eficiente. Em [6, 35, 36, 52, 53] todos assumem que  $A \subseteq V$  é uma aliança ofensiva de  $G$  se:

$$d(v) \geq 2d_{\bar{A}}(v) + 1, \forall v \in \bar{A}. \quad (4-1)$$

ou equivalente

$$d_A(v) \geq d_{\bar{A}}(v) + 1, \forall v \in \bar{A} \quad (4-2)$$

Em [35] os autores apresentam um limite inferior para  $\gamma_o$  de  $G$  de ordem  $x$ , tamanho  $y$  e de grau máximo  $\Delta$ , para grafos gerais.

$$\gamma_o(G) \geq \left\lceil \frac{2x+y}{3\Delta+1} \right\rceil$$

Como já definido anteriormente, sejam  $G$  e  $H$  dois grafos conexos de ordem  $n$  e  $m$  respectivamente, para  $n \geq 2$ , e  $m \geq 3$ . O produto lexicográfico  $G \circ H$  onde  $v \in V(G)$ , denotamos por  $(G)_v$  o subgrafo  $\{v\} \circ H$  de  $G \circ H$ . O subconjunto  $A$  de  $V(G \circ H)$ , denotamos por  $p_{(G)}(A) = \{\exists u, v \in V(H)(v, u) \in A\}$ . Neste caso os vértices de uma cópia de  $H$  tem  $d_H(v)$  vizinhos no próprio sugrafo, mais  $d_G(v) \times m$  dos subgrafos vizinhos. Denotamos  $V(G_n) = \{u_i : 1 \leq i \leq n\}$ ,  $V(H_m) = \{v_i : 1 \leq i \leq m\}$ ,  $D = G_n \circ H_m$ ,  $V(D) = \{w_{ij} : u_i \in V(G_n) \text{ e } v_j \in V(H_m)\}$ ,

Babujee e Jagadesh [2] apresentaram alguns estudos sobre produto lexicográfico, um deles foi o produto lexicográfico entre  $P_n$  e  $C_m$  e que sempre será  $(m+2, 2m+2)$  um grafo biregular como resultado.

De acordo com as equações 4-1 e 4-2 e [2] é possível observar que

Se  $v \in C_i \setminus A$ ,  $n \geq 3$  e  $i \notin \{1, n\}$  para  $P_n \circ C_m$  então

$$|N(v) \cap A| \geq m+2, \forall v \in \bar{A} \quad (4-3)$$

Esta observação é utilizada nas proposições para determinar a aliança ofensiva global em  $P_n \circ C_m$  a seguir.

**Lema 4.26** *Sejam  $n \geq 3$  e  $m \geq 3$  números inteiros. Então existe uma aliança ofensiva global mínima de  $\gamma_o(P_n \circ C_m)$  que não possui todos os vértices de  $(C_m)_1$  nem de  $(C_m)_n$ . Além disso, caso  $m \geq 7$ , nesta aliança ofensiva global mínima há pelo menos  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  vértices em  $A$  para cada  $(C_m)_2$  e  $(C_m)_{n-1}$ .*

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $P_n \circ C_m$ , Podemos obter uma aliança ofensiva global com, no máximo, o mesmo tamanho, se passamos todos os vértices de  $(C_m)_2$  para  $A$ . Isto implica que, se uma vez que algum vértice  $v$  de  $(C_m)_1$  não está em  $A$ , então  $(C_m)_2$  terá pelo menos  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  vértices em  $A$ . Se  $(C_m)_1$  possui os outros 2 (dois)  $v$  atacando, nós podemos passar esses vértices para  $(C_m)_2$ , obtendo uma aliança ofensiva global do mesmo tamanho.  $\square$

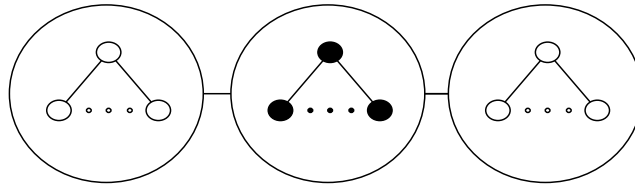
Portanto resumimos abaixo as condições de que todas as construções de uma AOG para  $P_n \circ C_m$  obedecem:



1.  $(C_m)_1$ , e  $(C_m)_n$  não possuem vértices em  $A$  para toda a distribuição dos vértices de uma AOG,
2. Todos os vértices de  $(P_n \circ C_m) \setminus A$  possuem algum vizinho em  $A$ , deste modo,  $A$  é um conjunto dominante de  $(P_n \circ C_m)$ .
3. Com  $v \in \bar{A}$ ,  $|N(v) \cap A| \geq m + 2$ , se  $v \in C_i \setminus A$  e  $i \notin \{1, n\}$
4.  $|(C_m)_2 \cap A|$  e  $|(C_m)_{n_1} \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$ , então a condição 4-3 é satisfeita.
5. Nós temos  $d_A(v) \geq d_{\bar{A}}(v) + 1$  ou  $d_A(v) \geq d_{\bar{A}}(v) + 1$ , então a condição 4-2 é satisfeita e portanto,  $A$  é uma AOG de  $(P_n \circ C_m)$ .

**Proposição 4.27** *Seja  $n = 3$ , então  $\gamma_o(P_n \circ C_m) = m$ .*

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $P_n \circ C_m$ .  $A$  contém  $m$  vértices  $(C_m)_2$ . Observamos um exemplo desta construção na Figura 4.10. Com essa construção todas as condições para uma AOG para  $P_n \circ C_m$  são atendidas. Portanto  $\gamma_o(P_n \circ C_m) \leq m$ . Supomos, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_3 \circ C_m)$  com menos de  $m$ . Logo, existe um vértice de  $(C_m)_2$  que não está em  $A$ . Então de acordo com 4-3,  $|A| \geq m + 2$ , portanto  $|A| \geq m$ , uma contradição. Logo  $\gamma_o(P_n \circ C_m) = m$ . O que completa a prova.  $\square$

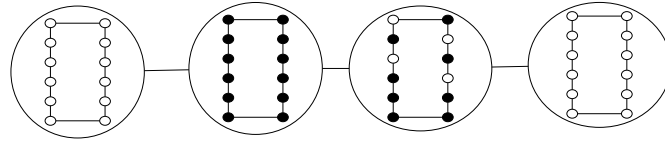


**Figura 4.10:** Exemplo de produto lexicográfico que atende a Proposição 4.27, sendo resultante de  $P_3 \circ C_m$

**Proposição 4.28** *Seja  $n = 4$ , então  $\gamma_o(P_n \circ C_m) = m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$*

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $P_n \circ C_m$ ,  $A$  contém  $m$  vértices  $(C_m)_2$  e  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \times m + 2$  de  $(C_m)_3$ . Observamos um exemplo desta construção na Figura 4.11. Com essa construção todas as condições para uma AOG para  $P_n \circ C_m$  são atendidas. Portanto  $\gamma_o(P_n \circ C_m) \leq m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$

Supomos, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_4 \circ C_m)$  com menos que  $m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  vértices. Pelo Lema 4.26,  $|C_i \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  para  $i \in \{2, 3\}$ . Então sem perda de generalidade, existe um vértice de  $(C_m)_2$  que não está em  $A$ . Então de acordo com 4-3,  $|((C_m)_1 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq 2m$ . Portanto  $\gamma_o(P_n \circ C_m) \geq m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$ . Se  $(C_m)_3 \not\subseteq A$ , então  $|((C_m)_2 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq m$ , que não é possível, pois  $A$  não seria um conjunto dominante de  $P_n \circ C_m$ . Logo,  $(C_m)_3 \subset A$ , uma contradição. Logo  $\gamma_o(P_n \circ C_m) = m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$ , o que



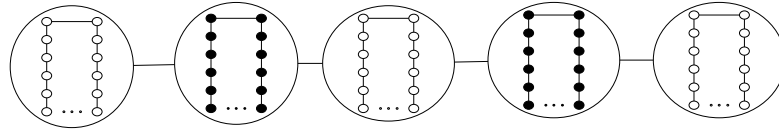
**Figura 4.11:** Exemplo de produto lexicográfico que atende a Proposição 4.28, sendo resultante de  $P_4 \circ C_{12}$

completa a prova. □

**Proposição 4.29** *Seja  $n = 5$ , então  $\gamma_o(P_5 \circ C_m) = 2m$*

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $P_n \circ C_m$ ,  $A$  contém  $m$  vértices  $(C_m)_2$  e  $(C_m)_4$ . Observamos um exemplo desta construção na Figura 4.12. Com essa construção todas as condições para uma AOG para  $P_n \circ C_m$  são atendidas. Logo  $\gamma_o(P_n \circ C_m) \leq 2m$

Supomos, por contradição, que que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_5 \circ C_m)$  com menos que  $2m$  vértices. Pelo Lema 4.26,  $|C_i \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  para  $i \in \{2, 4\}$ . Isto é, sem perda de generalidade, existe um vértice de  $(C_m)_2$  que não está em  $A$ . Então de acordo com 4-3,  $|((C_m)_1 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq m + 2$ , uma contradição. O mesmo pode ser dito para  $(C_m)_4$ . Logo  $\gamma_o(P_n \circ C_m) = 2m$ , o que completa a prova. □



**Figura 4.12:** Exemplo de produto lexicográfico que atende a Proposição 4.29, sendo resultante de  $P_5 \circ C_m$

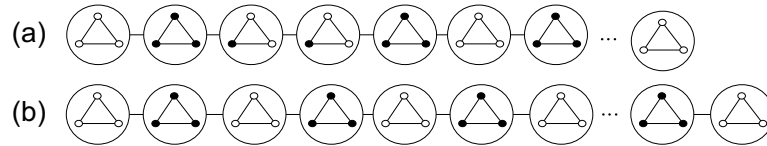
**Proposição 4.30** *Seja  $n \geq 6$ ,  $m = 3$  números inteiros. Então*

$$\gamma_o(P_n \circ C_m) \leq \begin{cases} \left(\frac{n-2}{2}\right) \times m + 2 & \text{Se } n \text{ par} \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m & \text{Se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $P_n \circ C_m$ , caso  $n = \text{par}$ . Considere  $A$  contendo  $m$  vértices para todo  $(C_m)_i$ ,  $i = \text{par}$  e  $2 \leq i \leq n - 4$ , um vértice de  $(C_m)_{n-3}$ , um vértice de  $(C_m)_{n-2}$  e mais  $m$  vértice de  $(C_m)_{n-1}$ . Observamos um exemplo desta construção na Figura (a) apresentada em 4.13. Com essa construção todas as condições para uma AOG para  $P_n \circ C_m$  são atendidas. Logo  $\gamma_o(P_n \circ C_m) \leq \left(\frac{n-2}{2}\right) \times m + 2$  Supomos, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_n \circ C_m)$  com menos que  $\left(\frac{n-2}{2}\right) \times m + 2$  vértices. Se o vértice de  $(C_m)_{n-3}$  não está em  $A$ , então  $((C_m)_{n-2} \cup (C_m)_{n-1}) \cap A \geq 2m$ ,

portanto a  $|A| \geq \binom{n-2}{2} \times m + 2$ , uma contradição. O mesmo pode ser dito se o vértice de  $(C_m)_{n-2}$  não está em  $A$ . Pelo Lema 4.26,  $|(C_m)_i \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  para  $i \in \{2, n-1\}$ . Isto é, sem perda de generalidade, existe um vértice de  $(C_m)_i \forall i = \text{par e } 2 \leq i \leq n-4$  que não está em  $A$ . Então de acordo com 4-3, existe um vértice de  $|(C_m)_j \cap A| \geq m+2 \forall j = \text{ímpar}$ , uma contradição.

caso  $n = \text{ímpar}$ . Considere  $A$  contendo  $m$  vértices para todo  $((C_m)_i \forall i = \text{par e } 2 \leq i \leq n-1)$ . Observamos um exemplo desta construção na Figura (b) apresentada em 4.13. Com essa construção todas as condições para uma AOG para  $P_n \circ C_m$  são atendidas. Logo  $\gamma_o(P_n \circ C_m) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m$  Supomos, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_n \circ C_3)$  com menos que  $\binom{n-2}{2} \times m$  vértices. Pelo Lema 4.26,  $|(C_m)_i \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  para  $i \in \{2, n-1\}$ . Isto é, sem perda de generalidade, existe um vértice de  $(C_m)_i \forall i = \text{par}$  que não está em  $A$ . Então existe um vértice de  $|(C_m)_j \cap A| \geq m+2 \forall j = \text{ímpar}$ , uma contradição.  $\square$



**Figura 4.13:** Exemplos de produtos lexicográfico que atendem a Proposição 4.30 resultante de  $P_n \circ C_3$ , sendo (a)  $n$  par e (b)  $n$  ímpar

**Proposição 4.31** *Sejam  $n \geq 6$  e  $m \in \{4, 5, 6\}$  números inteiros. Então*

$$\gamma_o(P_n \circ C_m) = \begin{cases} \binom{n-2}{2} \times m + 3 & \text{Se } n \text{ par} \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m & \text{Se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $P_n \circ C_m$ .

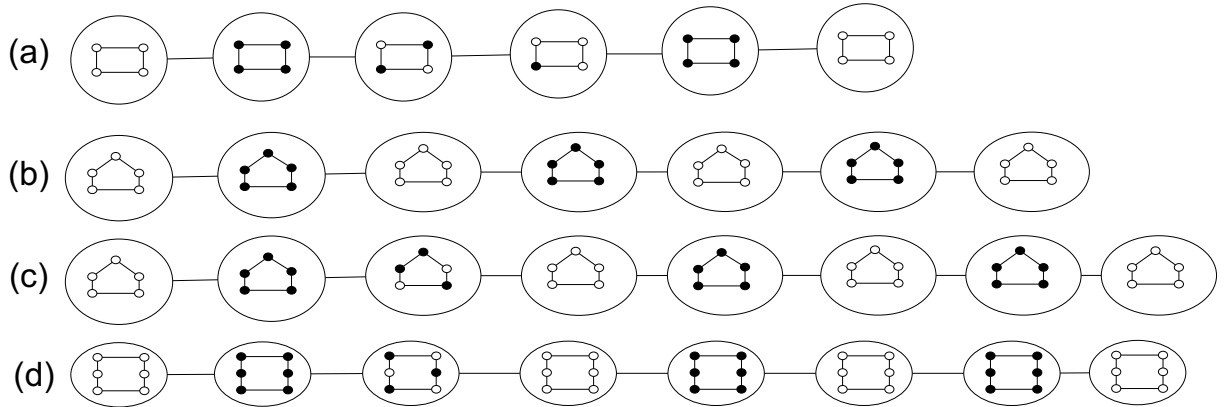
Observamos alguns exemplos desta Proposição nas Figuras apresentadas em 4.14.

caso  $m = 4$  e  $n$  par. Considere  $A$  contendo  $m$  vértices de  $(C_m)_2$  e 2 (dois) vértices alternados de  $(C_m)_3$  e um vértice de  $(C_m)_4$ . Para a próxima sequência, adicione  $\forall i = \text{ímpar e } 5 \leq i \leq n-1$   $m$  vértices de  $(C_m)_i$ . Com essa construção todas as condições para uma AOG para  $P_n \circ C_m$  são atendidas. Logo  $\gamma_o(P_n \circ C_m) \leq \binom{n-2}{2} \times m + 3$  Supomos, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_n \circ C_m)$ ,  $m = 4$  com menos que  $\binom{n-2}{2} \times m + 3$  vértices. Se  $|(C_m)_3 \cap A| < 2$ , então de acordo com 4-3,  $((C_m)_4 \cup (C_m)_5) \cap A \geq m+2$ , portanto a  $|(C_m)_4 \cap A| \geq 2$ , uma contradição. O mesmo pode ser dito se o vértice de  $(C_m)_4$  não está em  $A$ . Pelo Lema 4.26,  $|(C_m)_i \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  para  $i \in \{5, n-1\}$ . Isto é, sem perda de generalidade, existe um vértice de  $(C_m)_i \forall i = \text{ímpar e } 5 \leq i \leq n-1$  que não está em

A. Então de acordo com 4-3, existe um vértice de  $|(C_m)_j \cap A| \geq m + 2 \forall j = \text{par}$ , uma contradição.

caso  $m = 5, 6$  e  $n$  par. Considere  $A$  contendo  $m$  vértices de  $(C_m)_2$  e 3 (três) vértices alternados de  $(C_m)_3$ . Para a próxima sequência, adicione  $\forall i = \text{ímpar}$  e  $5 \geq i \leq n - 1$   $m$  vértices de  $(C_m)_i$ . Com essa construção todas as condições para uma AOG para  $P_n \circ C_m$  são atendidas. Logo  $\gamma_o(P_n \circ C_m) \leq \left(\frac{n-2}{2}\right) \times m + 3$  Supomos, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_n \circ C_m)$ ,  $m \in \{4, 5, 6\}$  com menos que  $\left(\frac{n-2}{2}\right) \times m + 3$  vértices. Se tirarmos um vértice de  $|(C_m)_3 \cap A| = 2$ , então existe algum vértice de  $|(C_m)_3$  que não atende a condição 4-3, isto implica que  $|(C_m)_4 \cap A| = 1$ . Mas, esta soma é igual a  $|A|$ . Pelo Lema 4.26,  $|(C_m)_i \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  para  $i \in \{5, n - 1\}$ . Isto é, sem perda de generalidade, existe um vértice de  $(C_m)_i \forall i = \text{ímpar}$  e  $5 \geq i \leq n - 1$  que não está em  $A$ . Então de acordo com 4-3, existe um vértice de  $|(C_m)_j \cap A| \geq m + 2 \forall j = \text{par}$ , uma contradição.

caso  $m \in \{4, 5, 6\}$  e  $n$  ímpar. Considere  $A$  contendo  $m$  vértices para todo  $(C_m)_i \forall i = \text{par}$  e  $2 \geq i \leq n - 1$ . Com essa construção todas as condições para uma AOG para  $P_n \circ C_m$  são atendidas. Logo  $\gamma_o(P_n \circ C_m) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m$  Supomos, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_n \circ C_m)$  com menos que  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m$  vértices. Pelo Lema 4.26,  $|(C_m)_i \cap A| \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m$  para  $i \in \{2, n - 1\}$ . Isto é, sem perda de generalidade, existe um vértice de  $(C_m)_i \forall i = \text{par}$  que não está em  $A$ . Então  $|(C_m)_j \cap A| \geq m + 2 \forall j = \text{ímpar}$ , uma contradição.  $\square$



**Figura 4.14:** Exemplos de produto lexicográfico que atendem as proposições 4.31 resultantes de  $P_n \circ C_m$ , sendo (a)  $P_6 \circ C_4$ , (b)  $P_7 \circ C_5$ , (c)  $P_8 \circ C_5$ , (d)  $P_8 \circ C_6$

**Proposição 4.32** *Sejam  $n = 7$  e  $m \geq 7$  números inteiros. Então*

$$\gamma_o(P_7 \circ C_m) = \begin{cases} 3m & \text{Se } m \leq 9 \\ \chi + m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2 & \text{Se } m \geq 10 \end{cases}$$

Onde  $\chi = \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor (m+4)$ .

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $P_7 \circ C_m$ ,

caso  $m \leq 9$ . Considere  $A$  contendo  $m$  vértices para  $(C_m)_i$ ,  $i \in \{2, 4, 6\}$ . Observamos um exemplo desta construção na Figura (a) apresentada em 4.15. A construção obedece a condição de construção de uma AOG em  $P_n \circ C_m$ . Logo  $\gamma_o(P_7 \circ C_m) \leq 3m$ .

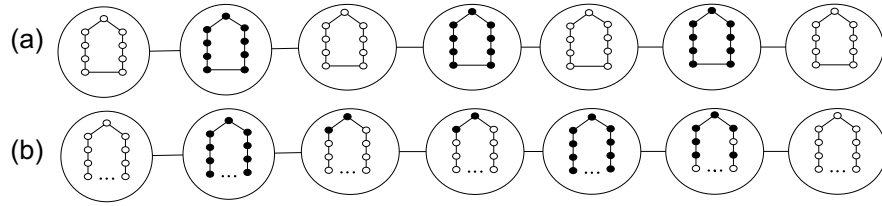
Supomos, por contradição, que existe uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_7 \circ C_m)$  com menos que  $3m$  vértices. Pelo Lema 4.26,  $|C_i \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  para  $i \in \{2, 6\}$ . Considere que  $(C_m)_4 \subset A$ . Isto é, sem perder a generalidade, que  $(C_m)_2 \not\subset A$ . Então pelo menos  $m$  vértices de  $A$  estão em  $(C_m)_1 \cup (C_m)_3$ . Mas, esta soma é superior a  $|A|$ .

Então  $(C_m)_4 \not\subset A$ . Se  $(C_m)_2 \not\subset A$  e  $(C_m)_5 \not\subset A$ . Isto implica que  $|((C_m)_3 \cup (C_m)_5) \cap A| \geq m$ ,  $|((C_m)_1 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq m$ ,  $|((C_m)_5 \cup (C_m)_7) \cap A| \geq m$ . Mas, esta soma é superior a  $A$ . Então sem perder a generalidade  $(C_m)_2 \subset A$ . Isto implica que alguns vértices de  $(C_m)_6$  não estão em  $A$ . Então  $|((C_m)_3 \cup (C_m)_5) \cap A| \geq m$ ,  $|((C_m)_5 \cup (C_m)_7) \cap A| \geq m$ . O mínimo para satisfazer as duas condições é todo os  $m$  vértices de  $(C_m)_5$  serem adicionados em  $A$ . Então precisamos adicionar pelo menos 2 conjuntos dominantes em  $(C_m)_3 \cup (C_m)_4$ . Os vértices considerados até agora somam  $2m + 4 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$ . Mas, uma vez que  $m \leq 9$ ,  $\gamma_2 \geq 2m - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$ , uma contradição.

Caso  $m \geq 9$ . Considere  $A$  contendo  $m$  vértices para  $(C_m)_2$  e  $(C_m)_5$ , 2(dois) vértices para  $(C_m)_3$  e  $(C_m)_4$ , mais  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  vértices de  $(C_m)_6$ . Observamos um exemplo na Figura (b) apresentada em 4.15. Com essa construção todas as condições para uma AOG para  $P_n \circ C_m$  são atendidas. Logo  $\gamma_o(P_7 \circ C_m) \leq 2m + 4 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$ . Supomos, por contradição que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_7 \circ C_m)$  com menos que  $2m + 4 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  vértices. Pelo Lema 4.26,  $|C_i \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  para  $i \in \{2, 6\}$ . Considere que  $(C_m)_4 \subset A$ . Isto é, sem perder a generalidade, que  $(C_m)_2 \not\subset A$ . Então pelo menos  $m$  vértices de  $A$  estão em  $(C_m)_1 \cup (C_m)_3$ . Mas, esta soma é maior que  $A$ . Então  $(C_m)_4 \not\subset A$ . Se  $(C_m)_2 \not\subset A$  e  $(C_m)_5 \not\subset A$ . Isto implica que  $|((C_m)_3 \cup (C_m)_5) \cap A| \geq m$ ,  $|((C_m)_1 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq m$ ,  $|((C_m)_5 \cup (C_m)_7) \cap A| \geq m$ . Mas, esta soma é maior que  $A$ .

Então sem perder a generalidade  $(C_m)_2 \subset A$ . Isto implica que alguns vértices de  $(C_m)_6$  não estão em  $A$ . Então  $|((C_m)_3 \cup (C_m)_5) \cap A| \geq m$ ,  $|((C_m)_5 \cup (C_m)_7) \cap A| \geq m$ . O mínimo para satisfazer as duas condições são todos os  $m$  vértices de  $(C_m)_5$  estarem em  $A$ . Então precisamos adicionar pelo menos dois conjuntos dominantes em  $(C_m)_3 \cup (C_m)_4$ . Os vértices considerados até agora somam  $2m + 4 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$ . Mas, uma vez que  $m \geq 9$ , isto implica que  $|A| \geq 2m + 4 + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$ , uma contradição.  $\square$

**Proposição 4.33** *Sejam  $m \geq 7$  e  $n \in \{6, 8, 10\}$ . Então  $\gamma_o(P_n \circ C_m) = \binom{n-2}{2} \times m + 4$*



**Figura 4.15:** Exemplos de produto lexicográfico que atendem as proposições 4.32 resultantes de  $P_7 \circ C_m$ , sendo (a)  $m \leq 9$  e (b)  $m \geq 9$

*Prova.* Seja  $m \geq 7$ ,

Case  $n = 6$ .

Considere  $A \subseteq V(P_n \circ C_m)$  contendo  $m$  vértices de  $(C_m)_i$ ,  $i \in 2, 5$  e 2 (dois) vértices de  $(C_m)_j$ ,  $j \in 3, 4$ . Observamos alguns exemplos desta construção nas Figuras (a), (b) e (c) apresentadas em 4.16. Com essa construção todas as condições para uma AOG para  $P_n \circ C_m$  são atendidas. Logo  $\gamma_o(P_6 \circ C_m) \leq 2m + 4$ .

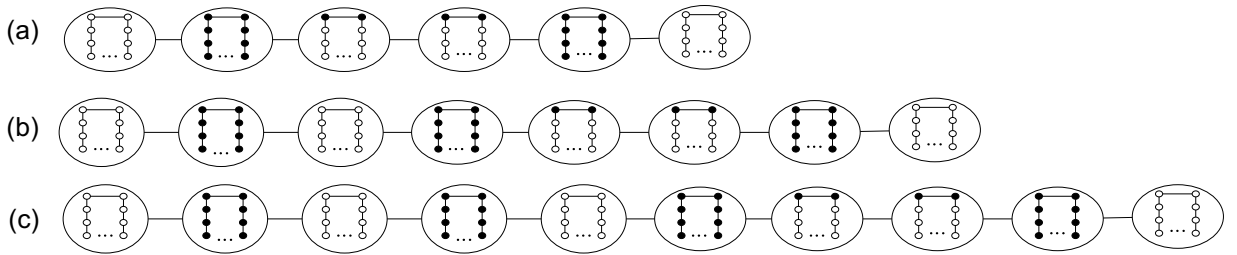
Supomos agora, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_6 \circ C_m)$  com menos que  $2m + 4$ . Pelo Lema 4.26,  $|C_i \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  para  $i \in \{2, 5\}$ . Observe que pelo menos  $|((C_m)_i \cup (C_m)_{i+1}) \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  for  $i \in \{2, 5\}$ . Se  $(C_m)_3 \subset A$ , então alguns vértices de  $(C_m)_5$  não pertence a  $A$  e não são atacados por  $A$ . O mesmo pode ser dito para  $(C_m)_4$ . Se  $(C_m)_1 \subset A$ , então alguns vértices de  $(C_m)_3$  não é atacado por  $A$ . O mesmo pode ser dito para  $(C_m)_6$ . Isto implica que  $(C_m)_2$  tem pelo menos  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  vértices em  $A$ . O mesmo para  $(C_m)_5$ . Supomos que  $(C_m)_2 \not\subset A$ . Então  $|((C_m)_1 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq m$ . Se  $(C_m)_5 \subset A$ , então alguns vértices de  $(C_m)_3$  não são atacados por  $A$ . Contudo, neste caso, alguns vértices de  $(C_m)_5$  não são atacados por  $A$ . Portanto,  $(C_m)_2$  e  $(C_m)_5$  estão contidos em  $A$ . Agora, uma vez que  $|A \cap ((C_m)_2 \cup (C_m)_5)| < 4$ , alguns vértices de  $(C_m)_3 \cup (C_m)_4$  tem pelo menos um vizinho em  $A \cap ((C_m)_3 \cup (C_m)_4)$ , o que significa que tais vértices não são atacados por  $A$ , uma contradição.

Caso  $n = 8$ . Considere  $A \subseteq V(P_n \circ C_m)$  contendo  $m$  vértices de  $(C_m)_i$ ,  $i \in 2, 4, 7$  e 2 (dois) vértices de  $(C_m)_j$ ,  $j \in 5, 6$ . Com essa construção todas as condições para uma AOG para  $P_n \circ C_m$  são atendidas. Logo  $\gamma_o(P_8 \circ C_m) \leq 3m + 4$ .

Supomos agora, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_8 \circ C_m)$  com menos que  $3m + 4$  vértices. Pelo Lema 4.26,  $|C_i \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  para  $i \in \{2, 7\}$ . Considere que  $(C_m)_2 \not\subset A$ . Então  $|((C_m)_1 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq m$ . Isto implica que  $(C_m)_7 \subset A$ , porque de outra forma,  $|((C_m)_6 \cup (C_m)_8) \cap A| \geq m$ , e algum vértice de  $(C_m)_5 \cup (C_m)_6$  não serão atacados por  $A$ . Isto implica que algum vértice de  $(C_m)_7$  não está em  $A$ . Além disso, tais vértices não são atacados por  $A$ , uma contradição.

Caso  $n = 10$ . Considere  $A \subseteq V(P_n \circ C_m)$  contendo  $m$  vértices de  $(C_m)_i$ ,  $i \in 2, 4, 6, 9$  e 2 (dois) vértices de  $(C_m)_j$ ,  $j \in 7, 8$ . Com essa construção todas as condições para uma AOG para  $P_n \circ C_m$  são atendidas. Logo  $\gamma_o(P_{10} \circ C_m) \leq 4m + 4$ .

Supomos agora, por contradição que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(P_{10} \circ C_m)$  com menos que  $4m + 4$  vértices. Pelo Lema 4.26,  $|C_i \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  para  $i \in \{2, 9\}$ . Considere que  $(C_m)_2 \not\subseteq A$ . Então  $|((C_m)_1 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq m$ . Isto implica que  $(C_m)_9 \subset A$ , porque de outra forma,  $|((C_m)_7 \cup (C_m)_{10}) \cap A| \geq m$ , e alguns vértices de  $(C_m)_7 \cup (C_m)_8$  não serão atacados por  $A$ . Isto implica que algum vértice de  $(C_m)_9$  não está em  $A$ . Além disso, tais vértices não são atacados por  $A$ , uma contradição.  $\square$



**Figura 4.16:** Exemplos de produto lexicográfico que atendem as conjecturas 4.33, sendo (a)  $P_6 \circ C_m$ , (b)  $P_8 \circ C_m$ , (c)  $P_{10} \circ C_m$

Como trabalho futuro queremos provar a Aliança ofensiva Global para a conjectura de  $P_n \circ C_m$  onde  $n \geq 11$ ,  $m \geq 7$ .

**Conjectura 2** *Sejam  $n \geq 11$  e  $m \geq 7$  números inteiros.*

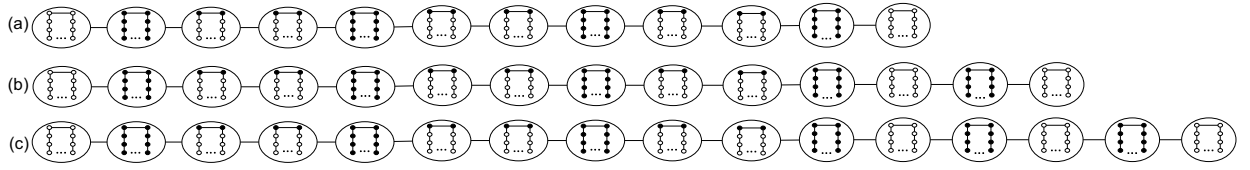
(i) *Se  $n$  par, então*

$$\gamma_o(P_n \circ C_m) = \begin{cases} \min \left\{ \left( \frac{n-2}{2} \right) \times m + 4, \chi + m \right\} & \text{Se } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \min \left\{ \left( \frac{n-2}{2} \right) \times m + 4, \chi + 2m \right\} & \text{Se } n \equiv 1 \pmod{3} \\ \min \left\{ \left( \frac{n-2}{2} \right) \times m + 4, \chi + 2m - 4 \right\} & \text{Se } n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

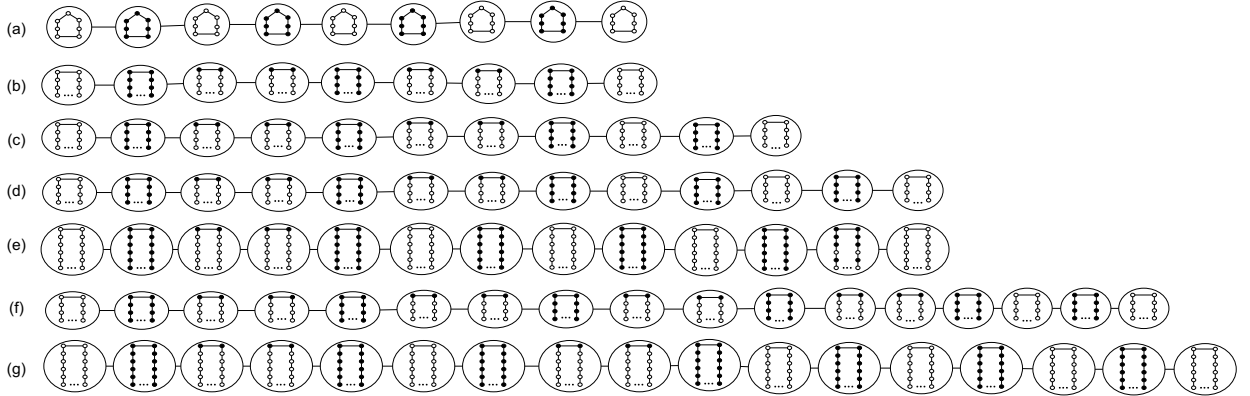
(ii) *Se  $n$  ímpar, então*

$$\gamma_o(P_n \circ C_m) = \begin{cases} \left( \frac{n}{2} \right) m & \text{Se } m \leq 8 \text{ e } n \equiv 0, 1, 2 \pmod{3} \\ \chi + m & \text{Se } m \geq 8 \text{ e } n \equiv 0 \pmod{3} \\ \min \left\{ \chi + m + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + 2, \chi + 2m - 4 \right\} & \text{Se } m \geq 8, n \geq 13 \equiv 1 \pmod{3} \text{ ou } n = 11 \\ \min \left\{ \chi + 2m, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2(m+4) \right\} & \text{Se } m \geq 8 \text{ e } n \geq 17 \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

Onde  $\chi = \lfloor \frac{n-3}{3} \rfloor (m+4)$ .



**Figura 4.17:** Exemplos de produto lexicográfico que atendem as conjecturas 2 resultantes de  $P_n \circ C_m$  com  $n$  par, sendo (a)  $P_{12} \circ C_m$  para  $m \geq 8$ , (c)  $P_{14} \circ C_m$  para  $m \geq 8$  e (d)  $P_{16} \circ C_m$  para  $m \geq 8$



**Figura 4.18:** Exemplos de produto lexicográfico que atendem as conjecturas 2 resultantes de  $P_n \circ C_m$  com  $n$  ímpar, sendo (a)  $P_9 \circ C_7$ , (b)  $P_9 \circ C_m$  para  $m \geq 8$ , (c)  $P_{11} \circ C_m$  para  $m \geq 8$ , (d)  $P_{13} \circ C_m$  para  $8 \leq m \leq 12$ , (e)  $P_{13} \circ C_m$  para  $m \geq 12$ , (f)  $P_{17} \circ C_m$  para  $8 \leq m \leq 12$  e (g)  $P_{17} \circ C_m$  para  $m \geq 12$

**Lema 4.34** *Sejam  $n \geq 4$  e  $m \geq 4$  números inteiros. Então existe uma aliança ofensiva global mínima de  $\gamma_o(C_n \circ C_m)$  que não possui todos os vértices de  $(C_m)_n$ . Além disso, nesta aliança ofensiva global mínima tem pelo menos  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  para cada  $(C_m)_1$  até  $(C_m)_{n-1}$ .*

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $C_n \circ C_m$ , denote  $V(C_n) = \{u_i : 1 \leq i \leq n\}$ ,  $V(C_m) = \{v_i : 1 \leq i \leq m\}$ ,  $G = C_n \circ C_m$ ,  $V(G) = \{w_{ij} : u_i \in V(C_n) \text{ e } v_j \in V(C_m)\}$ . Porque nós podemos obter uma aliança ofensiva global com, no máximo, o mesmo tamanho, se nós passamos todos os vértices para  $(C_m)_2$ . Agora, se uma vez que algum vértice  $v$  de  $(C_m)_1$  não está em  $A$ , então pelo menos  $(C_m)$  terá pelo menos  $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$  vértices em  $A$ . Se  $(C_m)_n$  tem os outros 2 (dois)  $v$  atacando, podemos passar esses vértices para  $(C_m)_1$ , obtendo uma aliança ofensiva global do mesmo tamanho.  $\square$

**Proposição 4.35** *Seja  $n = 3$ , então  $\gamma_o(C_n \circ C_m) = m + 2$*

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $C_n \circ C_m$ , considere  $A$  contendo  $m$  vertices para todo  $((C_m)_1)$  e 2 (dois) vértices de  $((C_m)_2)$ . Supomos, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(C_3 \circ (C_m))$  com menos que  $m + 2$  vértices.  $|(C_m)_i \cap A| \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil$



para  $i \in \{2, n-1\}$ . Então sem perda de generalidade, existe um vértice de  $(C_m)_1$  que não está em  $A$ . Então  $|((C_m)_2 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq m$ , uma contradição.  $\square$

**Proposição 4.36** *Sejam  $n = 4$  e  $m \geq 4$  números inteiros, então  $\gamma_o(C_n \circ C_m) = m + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m + 2$*

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $C_n \circ C_m$ ,  $A$  contém  $m$  vértices  $(C_m)_2$  e  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m + 2$  de  $(C_m)_3$ . Supomos, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(C_4 \circ C_m)$  com menos que  $m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  vértices. Pelo Lema 4.34,  $|C_i \cap A| \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2$  para  $i \in \{2, 3\}$ . Então sem perda de generalidade, existe um vértice de  $(C_m)_2$  que não está em  $A$ . Então  $|((C_m)_1 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq m$ . Se  $(C_m)_3 \not\subseteq A$ , então  $|((C_m)_2 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq m$ , que não é possível. Então  $(C_m)_3 \subset A$ , uma contradição.  $\square$

**Proposição 4.37** *Sejam  $n = 5$  e  $m \geq 7$  números inteiros, então  $\gamma_o(C_5 \circ C_m) = 2m + 4$*

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $C_n \circ C_m$ ,  $A$  contém  $m$  vértices  $(C_m)_2$  e  $(C_m)_4$ . Supomos, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(C_5 \circ C_m)$  com menos que  $2m + 4$  vértices. Pelo Lema 4.34,  $|C_i \cap A| \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil$  para  $i \in \{1, 4\}$ . Então sem perda de generalidade, existe um vértice de  $(C_m)_2$  que não está em  $A$ . Então  $|((C_m)_1 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq m$ , uma contradição.  $\square$

**Proposição 4.38** *Sejam  $n \geq 7$  e  $m = 3$  números inteiros. Então*

$$\gamma_o(C_n \circ C_m) \leq \begin{cases} \left(\frac{n-2}{2}\right) \times m & \text{Se } n \text{ par} \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m + 2 & \text{Se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $C_n \circ C_m$ .

caso  $n = \text{ímpar}$ . Considere  $A$  contendo  $m$  vértices para todo  $(C_m)_i \forall i = \text{ímpar}$  e  $1 \geq i \leq n-2$ , um vértice  $((C_m)_2)_{n-1}$ , um vértice  $((C_m)_3)_n$ . Supomos, por contradição, que exista uma AOG  $A$  de  $\gamma_o(C_n \circ (C_m)_3)$  com menos que  $\left(\frac{n-2}{2}\right) \times m + 2$  vértices.  $|C_i \cap A| \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil$  para  $i \in \{2, n\}$ . Então sem perda de generalidade, existe um vértice de  $(C_m)_1$  que não está em  $A$ . Então  $|((C_m)_2 \cup (C_m)_3) \cap A| \geq m$ , uma contradição.

caso  $n = \text{par}$ .  $A$  contém  $m$  vértices para todo  $((C_m)_3)_i \forall i = \text{ímpar}$  e  $1 \geq i \leq n-1$ .  $\square$

**Proposição 4.39** *Sejam  $n \geq 6$  e  $m \in \{4, 5, 6\}$ . Então*

$$\gamma_o(C_n \circ C_m) \leq \begin{cases} \left(\frac{n-2}{2}\right) \times (m+3) & \text{Se } n \text{ par} \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m & \text{Se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

*Prova.* Seja  $A$  uma aliança ofensiva global mínima de  $C_n \circ C_m$ , caso  $m = 4$  e  $n$  par.  $A$  contém  $m$  vértices para todo  $((C_m)_4)_i \forall i = \text{par e } 2 \geq i \leq n-4$ , 2 (dois) vértice  $((C_m)_4)_{n-3}$ , um vértice  $((C_m)_4)_{n-2}$  e mais  $m$  vértice  $((C_m)_4)_{n-1}$ .

caso  $m = 5, 6$  e  $n$  par.  $A$  contém  $m$  vértices para todo  $(C_m)_i \forall i = \text{par e } 2 \geq i \leq n-2$  mais 3 (três) vértice alternados de  $(C_m)_{n-1}$ .

caso  $m = 4, 5, 6$  e  $n$  ímpar.  $A$  contém  $m$  vértices para todo  $(C_m)_i \forall i = \text{par e } 2 \geq i \leq n-1$ .  $\square$

Sobre Aliança Ofensiva Global apresentamos as duas seguintes conjecturas.

**Conjectura 3** *Sejam  $n = 14$  e  $m \geq 7$  números inteiros. Então*

$$\gamma_o(C_{14} \circ C_m) = \begin{cases} 6m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + 4 & \text{Se } m \leq 24 \\ 4(m+4) + m & \text{Se } m \geq 24 \end{cases}$$

**Conjectura 4** *Sejam  $n \geq 6$  par e  $m \geq 7$  números inteiros.*

$$\gamma_o(C_n \circ C_m) \leq \begin{cases} \left(\frac{n}{2}\right) \times m + m + 4 & \text{Se } m \text{ par e } m = 3, 4 \text{ ou } n \leq 16 \notin 14 \text{ e } m \leq 8 \\ \left(\frac{n}{2}\right) \times \lceil \frac{m}{2} \rceil & \text{Se } n \leq 15 \text{ ímpar e } m \geq 8 \\ \left(\frac{n-3}{2}\right) \times (m+4) + 2m & \text{Se } n \leq 13 \equiv 1 \pmod{3} \text{ e } m \geq 8 \\ \left(\frac{n-2}{2}\right) \times (m+4) + m & \text{Se } n \leq 13 \equiv 2 \pmod{3} \text{ e } m \geq 8 \\ \left(\frac{n-2}{2}\right) \times (m+4) + \lceil \frac{m}{2} \rceil & \text{Se } n \geq 17 \text{ par e } m \leq 8 \\ \left(\frac{n-3}{3}\right) \times (m+4) & \text{Se } n \geq 17 \text{ ímpar e } m \leq 8 \\ \left(\frac{n-2}{2}\right) \times m + 3(2m+4) & \text{Se } n \geq 17 \equiv 0 \pmod{3} \text{ e } m \geq 8 \\ \left(\frac{n-3}{4}\right) \times (2m+4) + m & \text{Se } n \text{ ímpar } \geq 17 \equiv 1 \pmod{3} \text{ e } m \geq 8 \\ \left(\frac{n-3}{4}\right) \times (2m+4) & \text{Se } n \text{ par } \geq 17 \equiv 1 \pmod{3} \text{ e } m \geq 8 \\ \left(\frac{n-2}{2}\right) \times m + 2m & \text{Se } n \geq 17 \equiv 2 \pmod{3} \text{ e } m \geq 8 \end{cases}$$

Sobre Aliança Ofensiva Global de produto lexicográfico entre grafos caminho, ciclo com grafos estrela apresentamos os seguintes teoremas.

**Teorema 4.40** *Para qualquer grafo  $P_n \circ S_m$ , seja  $S_m$  um grafo estrela,  $m \geq 3$ ,  $n \geq 2$  números inteiros.*

$$\gamma_o(P_n \circ S_m) \leq \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \times (m+2) - 2 & \text{Se } (n \equiv 0 \pmod{3}) \text{ e } m \geq 4 \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \times m & \text{Se } (m = 3 \text{ para } \forall n) \text{ ou } (n \in \{2, 5\}) \\ & \text{ou } (n = 7 \text{ e } m \leq 5) \\ & \text{ou } (n \equiv 1 \pmod{3}) \text{ ímpar e } m = 4 \\ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \times m + \frac{n-4}{3} \times 2 + \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1 & \text{Se } (n \equiv 1 \pmod{3}) \text{ e } m \geq 4 \\ & \text{ou } (n = 7 \text{ e } m \geq 6) \\ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \times m + \frac{n-5}{3} \times 2 & \text{Se } (n \geq 8 \equiv 2 \pmod{3}) \text{ e } m \geq 4 \end{cases}$$

*Prova.* Seja  $n' = (3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) - 1)$  e par,  $I_1 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 0, 2 \pmod{3}\}$  e  $I_2 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 1 \pmod{3}\}$ ;

Nós consideramos 4 casos:

Observamos alguns exemplos destes casos nas Figuras 4.19.

**Caso 1:**  $n \equiv 0 \pmod{3}$  e  $m \geq 4$ .

Considere  $A \subseteq V(P_n \circ S_m)$  iniciando  $m$  vértices  $(S_m)_2$  e 1 vértice central de  $(S_m)_3$ . Para a próxima sequencia, adicione o vértice central de  $(S_m)_i$ ,  $i \in I_1$  mais  $m$  vértices de  $(S_m)_j$ ,  $j \in I_2$ . Com esta distribuição note que somente os vértices de  $(S_m)_1$  e  $(S_m)_n$  não possuem algum vértice em  $A$ , portanto todos os vértices de  $(P_n \circ S_m) \setminus A$  possuem algum vizinho em  $A$ , sendo, deste modo,  $A$  um conjunto dominante de  $(P_n \circ S_m)$ . Com  $v \in \bar{A}$ , ou  $d_A(v) = m \geq d_{\bar{A}}(v) + 1 = m$  para vértices raiz ou então para vértices folhas. Nós temos  $d_A(v) = m + 1 \geq d_{\bar{A}}(v) + 1 = m$  ou  $d_A(v) = m \geq d_{\bar{A}}(v) + 1 = m$ , então a condição 4-2 é satisfeita e portanto  $A$  é um AOG de  $(P_n \circ S_m)$ . Logo  $\gamma_o(P_n \circ S_m) \leq \frac{n}{3} \times (m + 2) - 2$ .

Para estender  $A$  a uma AOG em  $P_n \circ S_m$  quando  $n'$  não é divisível por 3, temos que modificar o conjunto  $A$  da seguinte maneira:

**Caso 2:** Se  $m = 3$  para  $\forall n$  ou Se  $n = 2, 5$

ou Se  $n = 7$  e  $m \leq 5$

ou Se  $n \equiv 1 \pmod{3}$  e  $n = \text{ímpar}$  e  $m = 4$ .

Considere  $A \subseteq V(P_n \circ S_m)$  contendo  $m$  vértices de  $(S_m)_i$ ,  $\forall i = \text{par}$  e  $1 > i \leq n$ .

$$|A| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \times m$$

**Caso 3:** Se  $n \equiv 1 \pmod{3}$  e  $m \geq 5$  e Se  $n = 7$  e  $m \geq 6$ .

Para  $P_4$  considere  $A \subseteq V(P_n \circ S_m)$  contendo  $m$  vértices de  $(S_m)_2$  e  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  of  $(S_m)_3$  e o vértice central de  $(S_m)_4$ . Considere  $A \subseteq V(P_n \circ S_m)$  contendo  $m$  vértices de  $(S_m)_2$  e os vértices centrais de  $(S_m)_3$  e  $(S_m)_4$ . Para a próxima sequencia, adicione os vértices centrais de  $(S_m)_i$ ,  $i \in I_1$  mais  $m$  vértices de  $(S_m)_j$ ,  $j \in I_2$  até  $n' = n - 3$ . Adicione  $m$  vértices de  $(S_m)_{n-2}$ ,  $\lceil \frac{m}{2} \rceil$  of  $(S_m)_{n-1}$  e o vértice central de  $(S_m)_n$ .

$$|A| = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \times m + \frac{n-4}{3} \times 2 + \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1$$

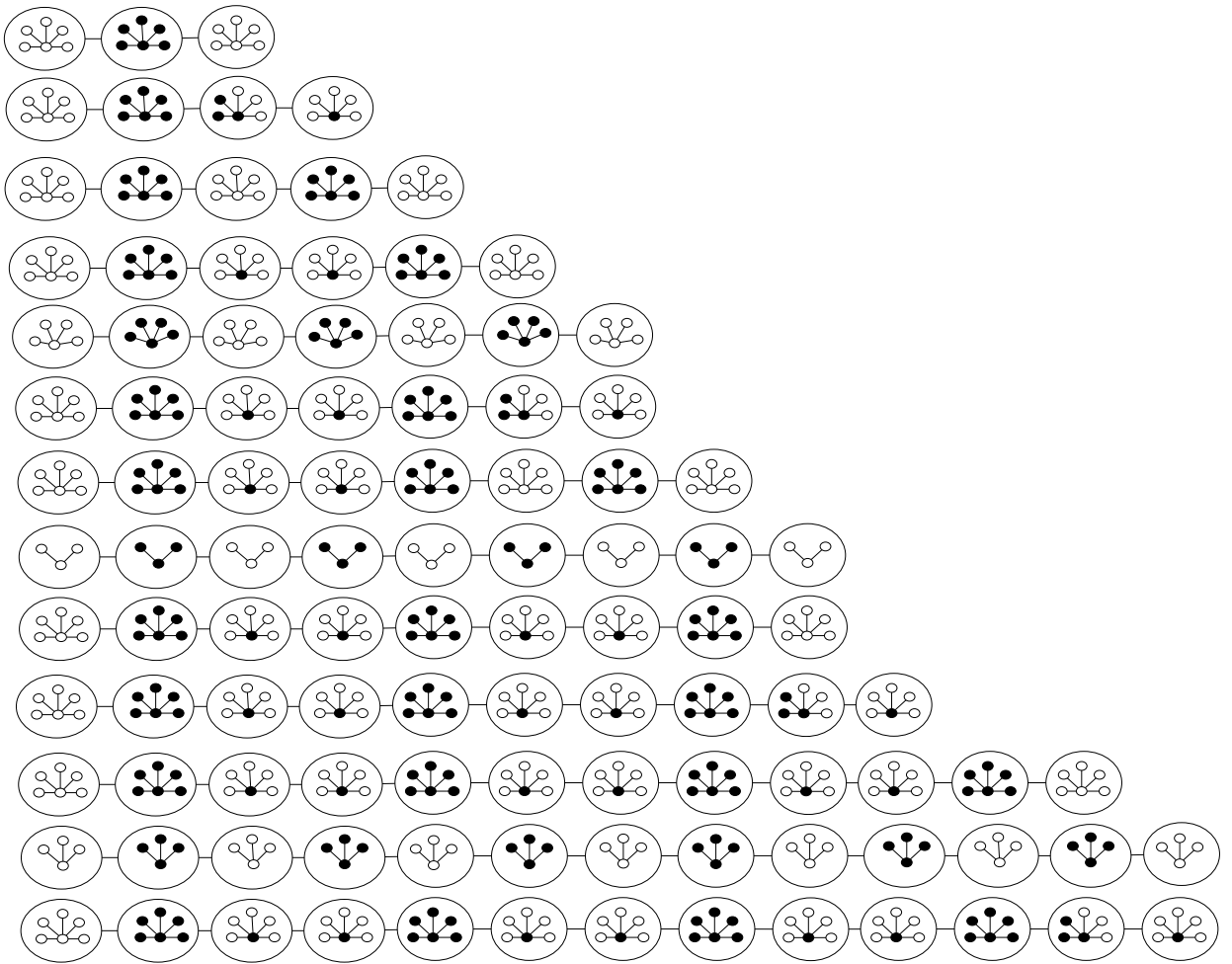
**Caso 4:**  $n \equiv 2 \pmod{3}$  e  $n \geq 8$ .

Para  $n' = n - 3$ , considere  $A \subseteq V(P_n \circ S_m)$  contendo no início  $m$  vértices de  $(S_m)_2$  e o vértice central do  $(S_m)_3$ . Para a próxima sequencia, adicione os vértices centrais de  $(S_m)_i$ ,  $i \in I_1$  mais  $m$  vértices de  $(S_m)_j$ ,  $j \in I_2$  até  $n' = n - 3$ . Adicione  $m$  vértices de  $(S_m)_{n-1}$ .

$$|A| = \lceil \frac{n}{3} \rceil \times m + \frac{n-5}{3} \times 2$$

□

**Teorema 4.41** Para um grafo  $C_n \circ S_m$ , seja  $S_m$  um grafo estrela.



**Figura 4.19:** Exemplos de produto lexicográfico que atendem o Teorema 4.40, sendo resultantes de  $P_n \circ S_m$

$$\gamma_o(C_n \circ S_m) = \begin{cases} \frac{n}{3}(m+2) & \text{Se } n \equiv 0(\text{mod } 3) \\ (\lceil \frac{n}{3} \rceil \times m) + (2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor) - 1 & \text{Se } n \equiv 1(\text{mod } 3) \\ (\lceil \frac{n}{3} \rceil \times m) + (2 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor) & \text{Se } n \equiv 2(\text{mod } 3) \end{cases}$$

*Prova.* Seja  $n' = 3(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor)$ ,  $I_1 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 0 \pmod{3}\}$  e  $I_2 = \{i \mid 1 \leq i \leq n'; i \equiv 1, 2 \pmod{3}\}$ .

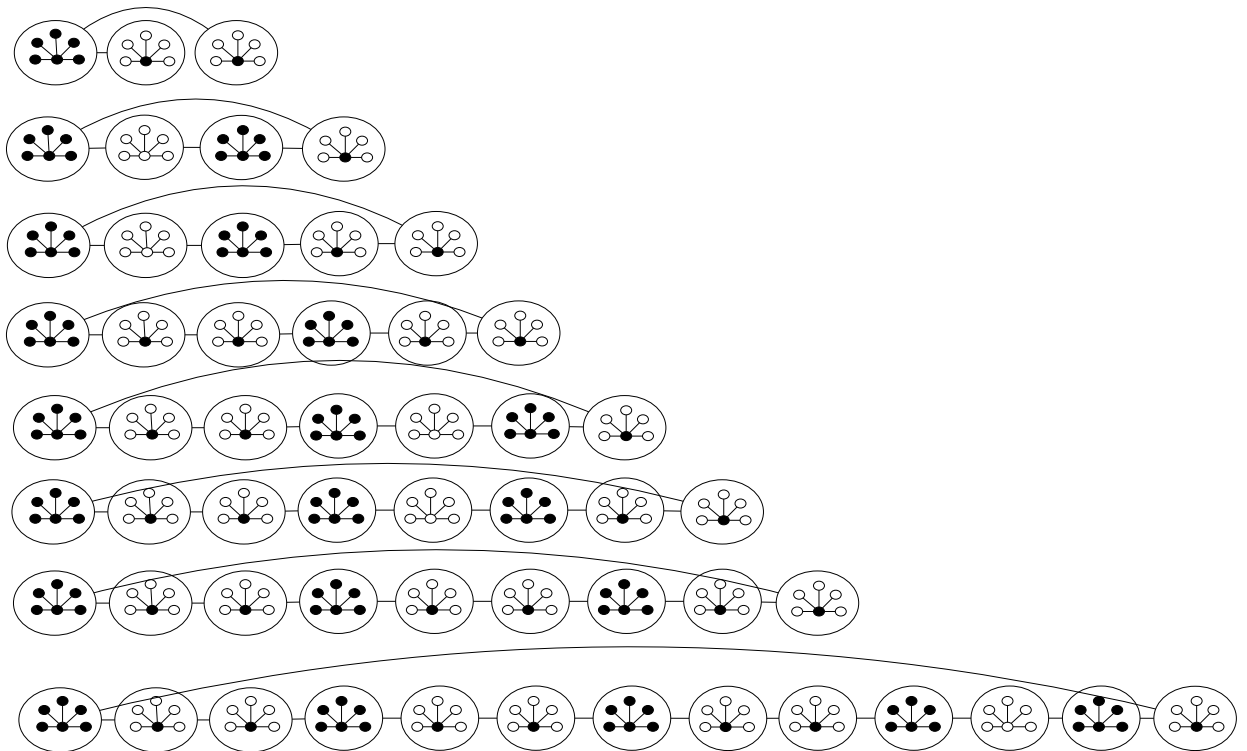
Nós separamos em três casos:

**Caso 1:**  $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ . Considere  $A \subseteq V(C_n \circ S_m)$  o vértice raiz de  $(S_m)_i$ ,  $i \in I_2$  mais  $m$  vértices de  $(S_m)_j$ ,  $j \in I_1$ . Observamos alguns exemplos desta construção nas Figuras 4.20. Com esta distribuição note que somente os vértices de  $(S_m)_1$  e  $(S_m)_n$  não possuem nenhum vértice em  $A$ , portanto todo vértice em  $(C_n \circ S_m) \setminus A$  tem algum vizinho em  $A$  e portanto  $A$  é um conjunto dominante de  $(C_n \circ S_m)$ . Para cada  $v \in \bar{A}$ , ou  $d_A(v) = m \geq d_{\bar{A}}(v) + 1 = m$  para vértices raízes ou então para vértices folha temos

$d_A(v) = m + 1 \geq d_{\bar{A}}(v) + 1 = m$  ou  $d_A(v) = m \geq d_{\bar{A}}(v) + 1 = m$ , deste modo satisfaz a condição 4-2 e portanto é uma AOG de  $(C_n \circ S_m)$ . Logo,  $\gamma_o(C_n \circ S_m) \leq \lfloor \frac{n \times m}{2} \rfloor$ .

**Caso 2:**  $n \equiv 1 \pmod{3}$  Considere  $A \subseteq V(C_n \circ S_m)$  contendo o vértice raiz de  $(S_m)_i$ ,  $i \in I_2$  mais  $m$  vértices de  $(S_m)_j$ ,  $j \in I_1$  até  $n - 2$ . Acrescentar  $m$  vértices de  $(S_m)_n$ .

**Caso 3:**  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Considere  $A \subseteq V(C_n \circ S_m)$  contendo o vértice raiz de  $(S_m)_i$ ,  $i \in I_2$  mais  $m$  vértices de  $(S_m)_j$ ,  $j \in I_1$  até  $n - 3$ . Acrescentar  $m$  vértices de  $(S_m)_n - 1$  mais o vértice raiz de  $(S_m)_n$ .  $\square$



**Figura 4.20:** Exemplos de produto lexicográfico que atendem o Teorema 4.41, sendo resultantes de  $C_n \circ S_m$

## 4.4 Mais algumas considerações

Mostramos a cardinalidade da aliança defensiva global para produto lexicográfico com algumas fórmulas fechadas e alguns limites superiores para grafos simples como Caminho, Ciclos e Estrelas em 4.2 o mesmo foi realizado para aliança ofensiva global em 4.3. É possível observar que o comportamento, mesmo de grafos simples, é bem variável. Ficam para trabalhos futuros as conjecturas apresentadas em 2 e 4.

É importante dizer que o produto lexicográfico entre grafos, diferentemente do produto cartesiano, não tem a propriedade comutativa, ou seja,  $G \circ H \neq H \circ G$ , portanto

os trabalhos para a descoberta das cardinalidades tanto da aliança defensiva global como para aliança ofensiva global somente para produto lexicográfico está iniciando.

Para trabalhos futuros também seria interessante mostrar, para grafos simples, como uma conjectura semelhante a conjectura de Vizing  $\gamma(G \times H) \geq \gamma(G) \times \gamma(H)$  é válida para produto lexicográfico e aliança global,  $\gamma_a(G \circ H) \geq \gamma_a(G)_a(H)$  e  $\gamma_o(G \circ H) \geq \gamma_o(G)_o(H)$ .

Quanto as Conjecturas 3 e 4 acreditamos que num futuro próximo consigamos provar as suas fórmulas fechadas e alguns limites superiores para as mesmas.

---

## Conclusões e Trabalhos Futuros

---

Com a realização deste trabalho, observamos que os estudos sobre aliança permanecem com muitas classes de grafos para serem exploradas. Os artigos que apresentam alianças globais defensivas e ofensivas para produto Cartesiano em grafos simples são bastante recentes, não existindo nenhuma publicação para outras classes de grafos e nem para outros tipos de produtos de grafos, o que mostra a importância deste estudo.

Mostramos o comportamento para a cardinalidade da aliança defensiva global para produto lexicográfico, com algumas fórmulas fechadas e alguns limites superiores para grafos simples como Caminho, Ciclos e Estrelas;

Para trabalhos futuros supomos conseguir provar as suas fórmulas fechadas para  $\gamma_o(P_n \circ P_m)$  e  $\gamma_o(C_n \circ P_m)$ .

Mostramos o comportamento para a cardinalidade da aliança ofensiva global para produto lexicográfico, com algumas fórmulas fechadas e alguns limites superiores para grafos simples como Caminho, Ciclos e Estrelas;

Fica para trabalhos futuros as conjecturas apresentadas para  $\gamma_a(P_n \circ C_m)$ ,  $\gamma_a(C_{14} \circ C_m)$  e  $\gamma_a(C_n \circ C_m)$ .

**Conjectura 5** *Sejam  $n = 14$ ,  $m \geq 7$  números inteiros. Então*

$$\gamma_o(C_{14} \circ C_m) = \begin{cases} 6m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + 4 & \text{Se } m \leq 24 \\ 4(m+4) + m & \text{Se } m \geq 24 \end{cases}$$

**Conjectura 6** *Sejam  $n \geq 6$  par e  $m \geq 7$  números inteiros.*

$$\gamma_o(C_n \circ C_m) \leq \begin{cases} \left(\frac{n}{2}\right) \times m + m + 4 & \text{Se } m \text{ par e } m = 3, 4 \text{ ou } n \leq 16 \notin 14 \text{ e } m \leq 8 \\ \left(\frac{n}{2}\right) \times \lceil \frac{m}{2} \rceil & \text{Se } n \leq 15 \text{ ímpar e } m \geq 8 \\ \left(\frac{n-3}{2}\right) \times (m+4) + 2m & \text{Se } n \leq 13 \equiv 1 \pmod{3} \text{ e } m \geq 8 \\ \left(\frac{n-2}{2}\right) \times (m+4) + m & \text{Se } n \leq 13 \equiv 2 \pmod{3} \text{ e } m \geq 8 \\ \left(\frac{n-2}{2}\right) \times (m+4) + \lceil \frac{m}{2} \rceil & \text{Se } n \geq 17 \text{ par e } m \leq 8 \\ \left(\frac{n-3}{3}\right) \times (m+4) & \text{Se } n \geq 17 \text{ ímpar e } m \leq 8 \\ \left(\frac{n-2}{2}\right) \times m + 3(2m+4) & \text{Se } n \geq 17 \equiv 0 \pmod{3} \text{ e } m \geq 8 \\ \left(\frac{n-3}{4}\right) \times (2m+4) + m & \text{Se } n \text{ ímpar } \geq 17 \equiv 1 \pmod{3} \text{ e } m \geq 8 \\ \left(\frac{n-3}{4}\right) \times (2m+4) & \text{Se } n \text{ par } \geq 17 \equiv 1 \pmod{3} \text{ e } m \geq 8 \\ \left(\frac{n-2}{2}\right) \times m + 2m & \text{Se } n \geq 17 \equiv 2 \pmod{3} \text{ e } m \geq 8 \end{cases}$$

Mostramos também o comportamento para a cardinalidade da aliança defensiva global para grafos simpliciais, bem como o comportamento para a cardinalidade da aliança defensiva global para produto complementar.

Para trabalhos futuros também seria interessante mostrar, para grafos simples, como uma conjectura semelhante a conjectura de Vizing  $\gamma(G \times H) \geq \gamma(G) \times \gamma(H)$  é válida para produto lexicográfico e aliança global,  $\gamma_a(G \circ H) \geq \gamma_a(G) \times \gamma_a(H)$  e  $\gamma_o(G \circ H) \geq \gamma_o(G) \times \gamma_o(H)$ .

Fica como sugestão também à obtenção de fórmulas fechadas e/ou limites para alianças defensivas e ofensivas globais em produto lexicográfico e prismas complementares em grafos gerais.

Finalmente, esperamos que a nossa contribuição seja útil na obtenção de outros resultados sobre alianças e na divulgação da área de Teoria dos Grafos.



---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] ARAUJO-PARDO, G.; BARRIÈRE, L. **Defensive alliances in regular graphs and circulant graphs.** *Opuscula Math.*, 31(2):153–158, 2008.
- [2] BABUJEE, J. B.; JADADESH, R. **On lexicographic product of graphs.** *International Journal of mathematics and Computer Science*, 2(2):163–168, 2007.
- [3] BARBOSA, R. M.; SLATER, P. **On efficient dominating sets in simplicial graphs.** *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 81:129–134, 2012.
- [4] BARBOSA, R. M.; DIAS, E. S. **Sobre alianças defensiva em grafos.** *Anais do XXXIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, 3:673–679, 2010.
- [5] BARBOSA, R. M.; HARTNELL, B. **Characterization of  $zm$ -well-covered graphs for some classes of graphs.** *Discrete Mathematics*, 233(1-3):293–297, 2001.
- [6] BERMUDO, S.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A.; SIGARRETA, J. M.; YERO, I. G. **On global offensive  $k$ -alliances in graphs.** *Applied Mathematics Letters*, 2010.
- [7] BOUZEFRAÏNE, M.; CHELLALI, M. **A note on global alliances in trees.** *Opuscula Math.*, 31(2):153–158, 2011.
- [8] BREŠAR, B. **Vizing-like conjecture for the upper domination of cartesian products of graphs-the proof.** *The Electronic Journal of Combinatorics*, 12, 2005.
- [9] BREŠAR, B.; DORBEC, P.; GODDARD, W.; HARTNELL, B. L.; HENNING, M. A.; KLAVŽAR, S.; RAL, D. F. **Vizing’s conjecture: A survey and recent results.** *Journal of Graph Theory*, 69(1):46–76, 2012.
- [10] BREŠAR, B.; KLAVŽAR, S.; HORVAT, A. T. **On the geodetic number and related metric sets in cartesian product graph.** *Discrete Mathematics*, 308:5555–5561, 2005.

- [11] BRIGHAM, R. C.; DUTTON, R. D.; HEDETNIEMI, S. T. **A sharp lower bound on the powerful alliance number of  $C_m \times C_n$ .** *Congressus Numerantium*, 167:57–63, 2004.
- [12] BRIGHAM, R. C.; DUTTON, R. D.; HEDETNIEMI, S. T. **Powerful alliance in graphs.** *Discrete Mathematics*, 309(8):2140–2147, 2009.
- [13] CAMI, A.; BALAKRISHNAN, H.; DEO, N.; DUTTON, R. D. **On the complexity of finding optimal global alliances.** *JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 58(4):23–31, 2006.
- [14] CHANG, C.-W.; CHIA, M.-L.; HSU, C.-J.; KUO, D.; LAI, L.-L.; WANG, F.-H. **Global defensive alliances of trees and cartesian product of paths and cycles.** *Discrete Applied Mathematics*, 160(4-5):479–487, Mar. 2012.
- [15] CHELLALI, M.; HAYNES, T. **Global alliances and independence in trees.** *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 27:19–27, 2007.
- [16] DOURADO, M.; PENSO, L.; RAUTENBACH, D.; SZWARCFITER, J. **The south zone: distributed algorithms for alliances.** In: *Stabilization, Safety, and Security of Distributed Systems*, p. 178–192. Springer, 2011.
- [17] ENCISO, R. I.; DUTTON, R. D. **Lower bounds for global alliances on planar graphs.** *Congressus Numerantium*, 187:187–192, 2007.
- [18] EROH, L.; GERA, R. **Global alliance partition in trees.** *JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 66:161–169, 2008.
- [19] FAVARON, O.; FRICKE, G.; GODDARD, W.; HEDETNIEMI, S. M.; HEDETNIEMI, S. T.; KRISTIANSEN, P.; LASKAR, R. C.; SKAGGS, R. D. **Offensive alliances in graphs.** *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 24(2):263–275, 2004.
- [20] FAVARON, O. **Global alliances and independent domination in some classes of graphs.** *The Electronic Journal of Combinatorics*, 15(1), 2008.
- [21] FERNAU, H.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A. **A survey on alliances and related parameters in graphs.** *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*, 2(1):70–86, 2014.
- [22] FERNAU, H.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A.; SIGARRETA, J. M. **Offensive r-alliances in graphs.** *Discrete Applied Mathematics*, 157(1):177–182, 2008.
- [23] FLOCCHINI, P.; LODI, E.; LUCCIO, F.; PAGLI, L.; SANTORO, N. **Dynamic monopolies in tori.** *Discrete Applied Mathematics*, 137(2):197–212, 2004.

- [24] HAMMACK, R.; IMRICH, W.; KLAVŽAR, S. **Handbook of Product Graphs**. CRC Press, Boca Raton, FL, second edition, 2011.
- [25] HARUTYUNYAN, A. **Some bounds on alliances in trees**. In: Faigle, U.; Schrader, R.; Herrmann, D., editors, *9th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization, Cologne, Germany, May 25-27, 2010. Extended Abstracts*, p. 83–86, 2010.
- [26] HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S. T.; HENNING, M. A. **Global defensive alliances in graphs**. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 10:139–146, 2003.
- [27] HAYNES, T. W.; HENNING, M. A.; SLATER, P. J.; VAN DER MERWE, L. C. **The complementary product of two graphs**. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications*, 51:21–30, 2007.
- [28] HAYNES, T. W.; HENNING, M. A.; VAN DER MERWE, L. C. **Domination and total domination in complementary prisms**. *Journal of Combinatorial Optimization*, 18(1):23–37, 2009.
- [29] HAYNES, T. W.; HOLMES, K. R.; KOESSLER, D. R.; SEWELL, L. **Locating-domination in complementary prisms of paths and cycles**. *Congressus Numerantium*, 199:45–55, 2009.
- [30] HOLMES, K. R.; KOESSLER, D. R.; HAYNES, T. W. **Locating-domination in complementary prisms**. *JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 72:163–171, 2010.
- [31] HSU, C.-J.; WANG, F.-H.; WANG, Y.-L. **Global defensive alliances in star graphs**. *Discrete Applied Mathematics*, 157:1924–1931, 2009.
- [32] KRISTIANSEN, P.; HEDETNIEMI, S. M.; HEDETNIEMI, S. T. **Alliances in graphs**. *JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 48:157–177, 2004.
- [33] PELEG, D. **Local majorities, coalitions and monopolies in graphs: a review**. *Theoretical Computer Science*, 282(2):231 – 257, 2002.
- [34] RANDEPATH, B.; VOLKMANN, L. **Simplicial graphs and relationships to different graph invariants**. *Ars Combinatoria*, 46:211–217, 1997.
- [35] RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A.; SIGARRETA, J. M. **Global offensive alliances in graphs**. *Discrete Mathematics*, 25:157–164, 2006.

- [36] RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A.; SIGARRETA, J. M. **Offensive alliances in cubic graphs.** *Int. Math. Forum*, 4(36):1773–1782, 2006.
- [37] RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A.; SIGARRETA, J. M. **Spectral study of alliances in graphs.** *Discuss. Math. Graph Theory*, 27(1):143–157, 2006.
- [38] RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A.; SIGARRETA, J. M. **Global alliance in planar graphs.** *AKCE J. Graphs. Combin.*, 4(1):83–98, 2007.
- [39] RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A.; SIGARRETA, J. M. **Defensive k-alliances in graphs.** *Applied Mathematics*, 22:96–100, 2009.
- [40] RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A.; SIGARRETA, J. M. **Global defensive k-alliances in graphs.** *Discrete Applied Mathematics*, 157:211–218, 2009.
- [41] SHAFIQUE, K. H.; DUTTON, R. D. **On satisfactory partitioning of graphs.** *Congressus Numeratum*, 154:183–194, 2002.
- [42] SHAFIQUE, K. H.; DUTTON, R. D. **Maximum alliance-free and minimum alliance-cover sets.** *Congressus Numeratum*, 162:139–146, 2003.
- [43] SHAFIQUE, K. H.; DUTTON, R. D. **A tight bound on the cardinalities of maximum alliance-free and minimum alliance-cover sets.** *JCMCC. The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 56:139–145, 2006.
- [44] SIGARRETA, J. M. **Upper k-alliances in graphs.** *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 6(43):2121–2128, 2011.
- [45] SIGARRETA, J. M.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A. **On defensive alliance and line graphs.** *Applied Mathematics Letters*, 19(12):1345–1350, 2006.
- [46] SIGARRETA, J. M.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A. **On the global offensive alliance number of a graph.** *Discrete Applied Mathematics*, 157(2):219–226, 2009.
- [47] SIGARRETA, J. M.; YERO, I. G.; BERMUDO, S.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A. **Partitioning a graph into offensive k-alliances.** *Discrete Applied Mathematics*, 159(4):224–231, 2011.
- [48] SRIMANI, P.; XU, Z. **Distributed protocols for defensive and offensive alliances in network graphs using self-stabilization.** In: *Computing: Theory and Applications, 2007. ICCTA '07. International Conference on*, p. 27–31, 2007.
- [49] VIZING, V. G. **The cartesian product of graphs.** *Vychislitelnye Sistemy*, 9:117–134, 1963.

- [50] YERO, I. G.; BERMUDO, S.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A.; SIGARRETA, J. M. **Partitioning a graph into defensive k-alliances**. *Acta Mathematica Sinica*, 27(1):73–82, 2011.
- [51] YERO, I. G.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A. **Boundary defensive k-alliances in graphs**. *Discrete Applied Mathematics*, 158:1205–1211, 2010.
- [52] YERO, I. G.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A. **Partitioning a graph into global powerful k-alliances**. *Graphs and Combinatorics*, 28:575–583, 2012.
- [53] YERO, I. G.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A. **Computing global offensive alliances in cartesian product graphs**. *Discrete Applied Mathematics*, 161:284–293, 2013.
- [54] YERO, I. G.; RODRÍGUEZ-VELÁZQUEZ, J. A. **Defensive alliances in graphs: a survey**. *ORCID: Connecting Research and Researchers*, arXiv:1308.2096 [math.CO], 2013.